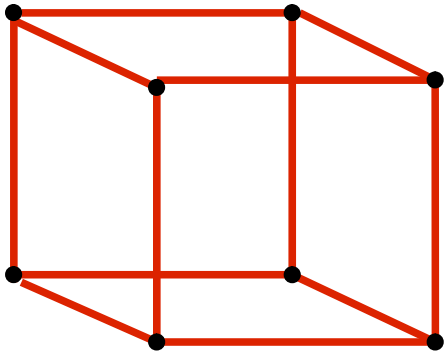
**KURS 3b, 3 och 4** lärobok med övningsuppgifter
Naturvetenskap och teknik

*Sigurd Eriksson*

# Matematik

**DEL II**



*bearbetad av*
*Lennart Gombrii*

# Nyutgåva av
# Sigurd Eriksson Matematik I & II

| Del I | Del II |
|---|---|
| 325 exempel, 1365 övningsex. | 236 exempel, 1400 övningsex. 10 prov |
| Antal sidor: 404 (212 ark) | Antal sidor: 346 (183 ark) |
| Vikt: 1360 g | Vikt: 1175 g |
| Dimension: 210 x 297 x 31 mm | Dimension: 210 x 297 x 30 mm |
| Tryck: Fyrfärg | Tryck: Fyrfärg |
| Bindning: Manuellt bunden bok, limmad rygg, klotband, hård pärm | Bindning: Manuellt bunden bok, limmad rygg, klotband, hård pärm |

# Förord

När jag för fyra år sedan fick ta del av uppgiften om att våra gymnasieelevers matematikkunskaper har drastiskt sjunkit de senaste 10 åren, beslöt jag mig att ge dagens elever möjligheten att ta del av

## Sigurd Erikssons

läroböcker, som jag läste i årskurs 1 och 2 i det treåriga Högre Tekniska Gymnasiet (TGÖ) i Örebro.

CARL SIGURD ERIKSSON

Fil. magister, Örebro. — F. i St. Tuna, Kopparb. län, 1889 7/4. Mog.-ex. i Falun 08; fil. ämbetsex. i Uppsala 12. Extra lärare vid Tekn. skolan i Örebro 17 o. vik. lektor vid Tekn. gymnasiet i Örebro fr. 20.

*Sigurd Erikssons bakgrund*[1]

Eriksson var verksam i TGÖ från 1917 till sin död 1948.

*Läroböckerna var ämnade att ge eleverna en stabil matematisk grund för att kunna arbeta som ingenjörer i samhället och industrin samt förbereda eleverna för högre studier på universitet och tekniska högskolor.*

Många elever, som läste vidare på KTH i Stockholm och Chalmers Tekniska Högskola i Göteborg, kunde tentera av den första årskursen p.g.a. sina goda förvärvade matematikkunskaper från TGÖ.

För att följa dagens läroplan har jag lagt till kapitel 27 komplexa tal.

Varje kapitel följer, där så är möjligt, samma struktur:

- Läroboksavsnitt
- Lösningsförslag
- Övningsuppgifter
- Facit till övningsuppgifterna

Exemplen är uppdelade i:

- *Exempel. nnn*, t.ex. ***Exempel. 227***. – där Eriksson har visat lösningen.
- *Ex.nnn*, t.ex. ***Ex. 212.*** – där Eriksson inte har visat någon lösning[2].

[1] Uppg. från Tekniska Föreningen i Örebro.

[2] Här är det matematiklärarnas ansvar att förklara en möjlig lösning. **Ett förslag till lösning** återfinns normalt i avsnittet Lösningsförslag.

- *önnn.* t.ex. ***ö912.*** – där det endast finns facit för att eleverna skall, utan övrig hjälp, lösa uppgifterna.
- *Pnn.* t.ex. *P10.* – provuppgifter, där inga svar ges.

## Decimalkomma / punkt

Engelsk matematisk litteratur använder decimalpunkt för att avskilja decimalerna. Även många miniräknare använder decimalpunkt. Vid framställning av denna bok har jag använt Microsofts Word, MathType från Design Science och Maple 18 från Maple Soft. Det senare programmet avskiljer decimalerna med decimalpunkt. Ersättes decimalpunkten med ett decimalkomma uppstår det ett mellanslag efter decimalkommat och talet ser endast konstigt ut. Exempel: 3,14159 blir Maple 18 - $3.14159$ men byter man till decimalkomma får vi $3,\ 14159$ . Därför får vi:

- skiljetecknet som decimal-*komma* vid användning av Word och MathType
- skiljetecknet som decimal-*punkt* vid användning av Maple 18 .

## Målgrupp

Denna bok och den föregående ”**Matematik Del I**” [3] vänder sig till elever, som önskar sig matematiska verktyg för att lösa konkreta problem i sin yrkesutövning och för att underlätta studierna på universitetsnivå.

## Övrigt

Innan du angriper en uppgift, försök att lägga upp en ***strategi*** för hur du skall angripa problemställningen.[4] Diskutera gärna med dina klasskamrater, om hur ni tillsammans kan finna ut den bästa strategin för att hitta lösning till uppgifterna. Det finns alltid flera möjliga vägar att lösa en uppgift.

**Omslagsbildens kub** ser du antingen nerifrån eller ovanifrån. Perspektivet växlar utan att du kan påverka det. På samma sätt dyker ett annat lösningsalternativ upp i din hjärna, när du försöker finna en framkomlig väg till lösning. Har du svårt att finna en lösning på kvällen, så är det ofta lätt att hitta lösningen på morgonen dagen efter, då din hjärna är utvilad och själv utan din vetskap bearbetat problemet när du sovit.

Tänk på att vårda din hälsa – var rädd om din hjärna och kropp, ät näringsrik mat, motionera och unna dig sömn och vila för att orka med studierna.

Jag får här framföra mitt tack till Tekniska Föreningen i Örebro och till Sveriges Läromedelsförfattares Förbund – SLFF, som bistått mig i min strävan att återutgiva denna nu bearbetade utgåva av Sigurd Erikssons läroböcker.

Jag får även framföra mitt tack till Maple Soft, som kostnadsfritt upplåtit programvaran ”Maple 18” till mig vid framställning av denna bok.

Ytterligare ett stort tack till Hermods AB, som givit mig tillstånd att utnyttja Professor Bo Kjellbergs kurs ”Högre Ingenjörskurs i Matematik, brev 2” som underlag till kapitel 27- Komplexa tal[5]. S. Erikssons Matematik del II saknade detta kapitel, varför jag tillåtet mig att här .komplettera boken

[3] Planeras komma ut år 2015.
[4] Se ”Sigurd Eriksson, Matematik del I avsitt 7.4 Hjärngymnastik/Färjkarlen”, där du måste göra upp en strategi för att lösa uppgiften.
[5] Endast utbildningslinjerna Tele- (svagström) och El-linjerna (starkström) läste komplexa tal i särskild matematikbok, övriga linjer Maskin-, Markantil- och Kemi- saknade detta avsnitt och därför även i denna del II av läroboken.

Så några rader för kommande elever. ”*Beträffande problemens karaktär bör nämnas, att enligt praxis brukar de 4-5 första problemen vara tämligen direkta tillämpligar på i denna kurs genomgångna satser och formler. 1 de senare problemen kan det hända, att en eller annan finess fordras för läsningen, man kanske är i behov av något uppslag, någon idé. Tyvärr är det i varje fall för författaren av dessa studiebrev obekant, hur man skulle kunna lära sig själv eller andra förmågan att få ljusa idéer och snilleblixtar vid de rätta tidpunkterna. Därför är det inte allas säkert, att ens den som perfekt inhämtat alla hittills meddelade kunskaper är i stånd att lösa samtliga 7 problem i en skrivning.*

*Redan en sådan sak som att en kombination av olika fakta ofta fordras för ett problems lösning kan innebära betydande svårigheter. Låt oss antaga, att vi har t.ex. 100 definitioner och satser att stödja oss på. Som vi sett i brev 1 finns det då* $\binom{100}{2} = \frac{100 \cdot 99}{1 \cdot 2} = 4950$ *kombinationer*[6]*r med 2 element,* $\binom{100}{3} = \frac{100 \cdot 99 \cdot 98}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 161700$ *kombinationer med 3 element osv. Att systematiskt pröva sig igenom de olika möjligheterna blir tydligen tidskrävande, Somliga har förmågan att snabbt finna den lämpliga kombinationen. Det brukar kallas intuition, en särskilt önskvärd och värdefull gåva för den som skall lösa matematiska problem.*”[7]

Kungsbacka maj 2015

Lennart Gombrii

[6] $\binom{100}{2}$ uttalas ”hundra över två”.

[7] Kjellberg, B, ”Högre ingenjörskurs i matematik” brev 12, Hermods, Malmö, 1961.

# Innehållsförteckning


## 1 Funktioner mm ..... 1

1.1 Om funktioner och deras grafiska framställning ..... 1

1.2 Grafisk lösning av ekvationer ..... 5

1.3 En rät linjes stigning – Den linjära funktionen ..... 7

1.4 En kroklinjes stigning – Begreppet gränsvärde ..... 9

1.5 Lösningsförslag ..... 10

1.6 Hjärngymnastik ..... 14

Glaskub ur två olika vinklar ..... 14

## 2 Begreppet derivata ..... 15

2.1 Derivatans geometriska betydelse ..... 15

2.2 Grafisk derivering ..... 16

2.3 Derivatan av en konstant ..... 16

2.4 Derivatan av potensfunktionen $y = x^n$ ..... 16

2.5 Deriveringsregler ..... 17

2.5.1 Derivatan av en algebraisk summa ..... 17

2.5.2 Derivatan av en produkt ..... 18

2.5.3 Derivatan av en kvot ..... 19

2.5.4 Derivatan av en funktion av en funktion ..... 20

2.6 Övningsuppgifter ..... 22

2.6.1 Derivering av algebraiska funktioner ..... 22

2.7 Facit ..... 24

2.8 Hjärngymnastik ..... 26

Magisk kvadrat 8 x 8 ..... 26

## 3 Exponentialfunktionens derivata ..... 27

3.1 Lösningsförslag ..... 28

3.2 Övningsuppgifter ..... 29

3.3 Facit ..... 29

3.4 Hjärngymnastik ..... 30

Schackproblem 1 ..... 30

**4 Logaritmfunktionens derivata** ..... 31
4.1 Lösningsförslag ..... 31
4.2 Övningsuppgifter ..... 32
4.3 Facit ..... 33
4.4 Hjärngymnastik ..... 34
Vägen till staden som saknade lögnare ..... 34
**5 De trigonometriska funktionernas derivator** ..... 35
5.1 Sinusfunktionens derivata ..... 36
5.2 Cosinusfunktionens derivata ..... 38
5.3 Tangensfunktionens derivata ..... 38
5.4 Cotangensfunktionens derivata ..... 38
5.5 Lösningsförslag ..... 39
5.6 Övningsuppgifter ..... 40
5.7 Facit ..... 41
5.8 Hjärngymnastik ..... 42
Tändsticksproblem 1 ..... 42
**6 De cyklometriska funktionernas derivator** ..... 43
6.1 Lösningsförslag ..... 45
6.2 Övningsuppgifter ..... 46
6.3 Facit ..... 47
6.4 Hjärngymnastik ..... 48
Kryss och ringar ..... 48
**7 Några funktioners derivator** ..... 49
7.1 Derivering av funktioner i implicit form ..... 49
7.2 Logaritmisk derivering ..... 50
7.3 Derivatan av potensfunktionen $y = x^n$ ..... 50
7.4 Derivering av funktioner i parameterform ..... 51
7.5 Derivator av högre ordning ..... 51
7.6 Sammanställning av de elementära funktionerna och deras derivator ..... 52
7.7 Övningsuppgifter ..... 53
Derivering av funktioner i implicit form ..... 53
Logaritmisk derivering ..... 54
Derivering av funktioner i parameterform ..... 54

Derivator av högre ordning ..... 56
Blandade exempel ..... 57
7.9 Hjärngymnastik ..... 58
Lyckotal ..... 58
**8 Funktioners maximi- och minimivärden** ..... 59
8.1 Övningsuppgifter ..... 62
Sök maxima och minima av följande funktioner samt avbilda dem: ..... 62
Sök maxima och minima av funktionerna: ..... 62
Sök maxima och minima av följande funktioner samt avbilda dem: ..... 62
Sök maxima och minima av *y* i följande ekvationer: ..... 62
8.2 Facit ..... 69
Sök maxima och minima av följande funktioner samt avbilda dem: ..... 69
Sök maxima och minima av funktionerna: ..... 69
Sök maxima och minima av följande funktioner samt avbilda dem: ..... 70
8.3 Hjärngymnastik ..... 74
Algebraiskt uttrycks geometrisk avbildning ..... 74
**9 En kurvas konkavitet, konvexitet och inflexion** ..... 75
9.1 Inledning ..... 75
9.2 Asymptoter ..... 77
9.3 Obestämda uttryck. Singulära punkter ..... 80
Funktionen ..... 80
9.4 Kurvkonstruktion ..... 83
9.4.1 Symmetri ..... 83
9.4.2 Existensområden ..... 83
9.4.3 Axelskärningspunkter ..... 84
9.4.4 Asymptoter ..... 84
9.4.5 Fördjupad kurvbestämning ..... 84
9.4.6 Kurvor i polär form ..... 85
9.5 Lösningsförslag ..... 86
9.6 Övningsuppgifter ..... 92
9.6.1 Konvexitet och konkavitet, inflexion, krökningsradie. ..... 92
9.6.2 Asymptoter ..... 93
9.6.3 Singulära punkter ..... 93

9.6.4 Kurvkonstruktion ..... 93
9.7 Facit ..... 94
9.7.1 Konvexitet och konkavitet, inflexion, krökningsradie. ..... 94
9.7.2 Asymptoter ..... 95
9.7.3 Singulära punkter ..... 97
9.7.4 Kurvkonstruktion ..... 97
9.8 Hjärngymnastik ..... 102
Slumpvåg ..... 102
**10 Differentialer och differentiering ..... 103**
10.1 Övningsuppgifter ..... 106
10.2 Facit ..... 108
10.3 Hjärngymnastik ..... 110
Kaninburen ..... 110
**11 Integraler ..... 111**
11.1 Obestämda integraler ..... 111
11.2 Grundintegraler ..... 112
11.3 Grafisk integrering ..... 113
11.4 Övningsuppgifter ..... 114
Omedelbar integrering ..... 114
11.5 Facit ..... 115
Omedelbar integrering ..... 115
11.6 Hjärngymnastik ..... 116
Tårtdelning ..... 116
**12 Integreringsregler ..... 117**
12.1 Konstantutflyttning ..... 117
12.2 Sönderdelning ..... 117
12.3 Transformering (substitution) ..... 117
Delvis integrering ..... 119
12.4 Lösningsförslag ..... 122
12.4 Övningsuppgifter ..... 122
Konstantutflyttning ..... 122
Sönderdelning ..... 122
Transformering (substitution) ..... 123

Delvis integrering ..... 124
12.5 Facit ..... 125
Konstantutflyttning ..... 125
Sönderdelning ..... 125
Transformering (substitution) ..... 125
Delvis integrering ..... 127
12.6 Hjärngymnastik ..... 128
Schackproblem 2 ..... 128
**13 Integrering av rationella funktioner (uppdelning i partialbråk) ..... 129**
I. Rötterna *reella* och *olika.* ..... 129
Obestämda koefficientmetoden ..... 129
II. Rötterna *reella* och helt eller delvis *lika.* ..... 130
III. Rötterna helt eller delvis *imaginära.* ..... 130
13.1 Övningsuppgifter ..... 132
Uppdelning i partialbråk ..... 132
13.2 Facit ..... 133
Uppdelning i partialbråk ..... 133
13.3 Hjärngymnastik ..... 134
Kvadratproblem ..... 134
**14 Integrering av några irrationella funk- tioner ..... 135**
I. Uttrycket under rotmärket är av 1:a graden ..... 135
II. Uttrycket under rotmärket är av 2:a graden ..... 135
14.1 Övningsuppgifter ..... 137
Irrationella uttryck ..... 137
Blandade exempel ..... 137
14.2 Facit ..... 138
Irrationella uttryck ..... 138
Blandade exempel ..... 139
14.3 Hjärngymnastik ..... 140
Pyramidproblem ..... 140
**15 Bestämd integral ..... 141**
15.1 Grundbegrepp ..... 141
15.2 Den bestämda integralen såsom gränsvärde för en summa ..... 142
15.3 Övningsuppgifter ..... 143

Formella exempel på bestämda integraler ..... 143
15.4 Facit ..... 144
Formella exempel på bestämda integraler ..... 144
15.5 Hjärngymnastik ..... 144
Permutation ..... 144
**16 Beräkning av plana ytor ..... 145**
16.1 Övningsuppgifter ..... 148
16.2 Facit ..... 151
16.3 Hjärngymnastik ..... 152
Sudoku 1 ..... 152
**17 Beräkning av plana kurvors längd ..... 153**
17.1 Övningsuppgifter ..... 155
17.2 Facit ..... 157
17.3 Hjärngymnastik ..... 158
Rep kring ekvatorn ..... 158
**18 Volymberäkning ..... 159**
18.1 Övningsuppgifter ..... 163
18.2 Facit ..... 165
18.3 Hjärngymnastik ..... 166
Schackproblem 3 ..... 166
**19 Beräkning av buktiga ytors area ..... 167**
19.1 Övningsuppgifter ..... 169
19.2 Facit ..... 171
19.3 Hjärngymnastik ..... 172
Schackproblem 4 ..... 172
**20 Tyngdpunktsberäkning ..... 173**
20.1 Kroppar ..... 173
20.1.1 Pyramidens och konens tyngdpunkt ..... 173
20.1.2 Rotationskropp ..... 174
20.2 Rotationsytor och linjer ..... 175
20.3 Guldins regler ..... 179
20.4 Övningsuppgifter ..... 180
20.4.1 Beräkning av plana kurvors tyngdpunkt ..... 180
20.4.2 Beräkning av plana ytors tyngdpunkt ..... 181

20.4.3 Beräkning av rotationsytors tyngdpunkt ..... 183
20.4.4 Beräkning av rotationskroppars tyngdpunkt ..... 184
20.5 Facit ..... 187
206 Hjärngymnastik ..... 188
Hunden Prosit ..... 188
**21 Beräkning av tröghetsmoment ..... 189**
21.1 Övningsuppgifter ..... 192
21.2 Facit ..... 194
21.3 Hjärngymnastik ..... 196
Mitt i prick ..... 196
**22 Analytisk behandling av 1:a och 2:a grads kurvor ..... 195**
22.1 Inledning ..... 195
22.2 Den räta linjen ..... 196
22.3 Elipsen ..... 200
22.4 Hyperbeln ..... 204
22.5 Parabeln ..... 207
22.6 Lösningsförslag ..... 210
22.7 Tangent och normal till 2:a grads kurva ..... 210
22.8 Andra grads kurvans diametrar ..... 214
22.9 Den allmänna andra grads ekvationens geometriska betydelse ..... 216
I. A och B har samma tecken. (Ellipsfallet.) ..... 217
II. A och B har olika tecken. (Hyperbelfallet.) ..... 217
III. A eller B = 0. (Parabelfallet.) ..... 218
22.10 Kägelsnitt ..... 220
22.11 Lösningsförslag ..... 221
22.12 Övningsuppgifter ..... 221
22.13 Hjärngymnastik ..... 222
Sudoku 2 ..... 222
**23 Serier ..... 225**
23.1 Inledning ..... 225
23.2 Aritmetisk serie ..... 225
23.3 Geometrisk serie ..... 227
23.4 Binomialserien ..... 228
23.5 Oändliga serier ..... 230

23.6 Lösningsförslag 234
23.7 Övningsuppgifter 235
23.8 Facit 237
23.9 Hjärngymnastik 238
Vilket tal är det 15:e talet? 238
**24 Sammansatt ränta 239**
24.1 Några samband 239
24.2 Exempel 239
24.3 Övningsuppgifter 242
24.4 Facit 244
24.5 Hjärngymnastik 244
Schackproblem 5 244
**25 Något om differentialekvationer 245**
25.1 Inledning 245
25.2 Exempel 245
25.3 Hjärngymnastik 248
Bygga torn 248
**26 Några fysikaliska tillämpningar 249**
26.1 Inledning 249
26.2 Ur mekaniken 249
26.3 Ur el-läran 256
26.4 Värmeläran 261
26.5 Hjärngymnastik 264
Schackproblem 6 264
**27 Komplexa tal 265**
27.1 Ett tankeexperiment 265
27.2 Inledning 265
27.2 .1 Addition av komplexa tal 266
27.2 .2 Subtraktion av komplexa tal 266
27.2 .3 Multiplikation av komplexa tal 266
27.2 .4 Division av komplexa tal 266
27.3 Räkneregler 267
27.4 Symbolen i 267

27.5 Några namn och definitioner ... 269
27.6 Generell metod för att beräkna belopp och argument för komplexa tal ... 270
27.7 Komplexa tal i polär form ... 273
27.8 Räkna med symbolen *i* ... 274
27.8 .1 Addition av komplexa tal ... 274
27.8. 2 Subtraktion av komplexa tal ... 274
27.8 .3 Multiplikation av komplexa tal ... 274
27.8 .4 Division av komplexa tal ... 274
27.9 Belopp och argument vid multiplikation och division ... 275
27.10 Moivres teorem ... 276
27.11 Konjugerande komplexa tal ... 276
27.12 Tre olikheter ... 278
27.13 Geometrisk representation ... 279
27.14 Addition ... 281
27.15 Subtraktion ... 282
27.16 Multiplikation och division ... 282
27.17 Translation och vridning ... 284
27.18 Likhet mellan komplexa tal ... 284
27.19 Några trigonometriska uppgifter ... 285
27.20 Ekvationer av 2:a graden ... 286
Kvadratkomplettering ... 287
27.21 Binomiska ekvationer ... 287
27.22 Faktoruppdelning ... 289
27.23 Övningsuppgifter ... 292
27.24 Provuppgifter ... 293
27.25 Facit och lösningsförslag ... 294
27.26 Avslutande kommentarer ... 300
27.27 Hjärngymnastik ... 300
Sudoku 3 ... 300

**28 Appendix** ..... 301
1. Grekiska alfabetet ..... 301
2. Binomialserie ..... 302
3 Kursplaner ..... 303
Kurskod: MATMAT03b ..... 303
Kurskod: MATMAT03c ..... 305
Kurskod: MATMAT04 ..... 307
4. Prefix ..... 310
5. Sigurd Erikssons originalutgåva ..... 311
Lärobok del I ..... 311
Övningsuppgifter del I ..... 311
Lärobok del II ..... 312
Övningsuppgifter del II ..... 313
Svar och anvisningar ..... 314
6. Bildförteckning ..... 315
Bilder ..... 315
2 Diagram ..... 317
Figurer (Fig.) ..... 318
Grafer ..... 319
Tabeller ..... 320
7. Formelförteckning ..... 321
8. Litteraturförteckning ..... 346
Böcker och tidskrifter ..... 346
Tidningsklipp ..... 346
Wikipedia ..... 346
9. En julhälsning från en elev i december 2014 ..... 347

# Förkortningar

| Förkortning | Förklaring |
|---|---|
| $\neq$ | skilt från |
| $\wedge$ | vinkeln |
| $\because$ | alltså |
| $\approx$ | ungefär lika med |
| $\equiv$ | ömsesidigt lika med |
| $\Delta$ | triangeln |
| approx | approximativt |
| d.v.s. | det vill säga |
| def. | definition |
| diam. | diameter |
| ekv. | ekvationen |
| ekv:na | ekvationerna |
| ex. | exempel |
| *fv* | kommande värde |
| föreg. | föregående |
| inneh. | innehåller |
| kap. | kapitel |
| likf. | likformiga |
| liks. | liksidig/a |
| mom. | moment |
| *n* | antal perioder |
| oändl. | oändlig |
| p.g.a. | på grund av |
| *pmt* | periodens inbetalning (annuitet) |
| pos. | positiv/a |
| prop. | proportionalen |
| *pv* | nuvärde |
| *r* | räntesats i % |
| reg. | regelbunden |
| resp. | respektive |
| trig. | trigonometriska |
| uppg. | uppgift |
| v.s.b. | vilket skulle bevisas |

# Funktioner mm

## 1.1 Om funktioner och deras grafiska framställning

Från algebran veta vi, att man ur *en* ekvation med *två* obekanta storheter *x* och *y*, t: ex. $y = 2x$ , inte kan bestämma de båda storheterna. Den anförda ekvationen utsäger endast att den ena storheten, *y*, är dubbelt så stor som den andra, *x*. Ger vi ett godtyckligt värde åt *x* kan vi ur ekvationen bestämma motsvarande värde på *y*. Det finns oändligt många par av värden på *x* och *y*, vilka satisfiera ekvationen. Några sådana är sammanställda i nedanstående tabell'

| | Uppmätta värden | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| *x* | -4 | -3 | -1 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| *y* | -8 | -6 | -2 | 0 | 2 | 4 | 6 | 8 |

***Tabell 1.*** *Mätvärden*

En storhet, som i likhet med *x* och *y* här ovan kan förändras (variera) till sitt värde, kalla vi en ***variabel***. Är en storhet däremot oföränderlig till sitt värde, såsom tvåan i ekvationen ovan, benämner vi den en ***konstant***. Om en variabel är till sitt värde beroende av en annan variabel, sägs den förra vara en ***funktion*** av den senare. Genom ekv. $y = 2x$ är *y* framställd som en funktion av *x*, då mot varje godtyckligt värde på *x*, den ***oberoende*** variabeln, svarar ett av ekvationen bestämt värde på *y*, den ***beroende*** variabeln. Exempel på andra funktionsformer är: $y = 2x + 3$,
$y = x^2$, $y = 2^x$, $y = \log_2(x)$. Vill man uttrycka, att *y* är en funktion av *x*, utan att ange funktionsformen, använder man vanligen skrivsättet

**(1.1)** $$y = f(x)$$

Variablerna, vilka man naturligtvis kan beteckna med andra bokstäver än *x* och *y*, kan representera variabla storheter av vitt skilda slag. Här följer några exempel:

Den med konstant hastighet *v* tillryggalagda vägen *s* är en funktion av tiden *t* enligt ekv.

**(1.2)** $s = v\,t$.

Omkretsen *O* och arean *A* av en cirkel är funktioner av diametern *d*, som ger

**(1.3)** $O = \pi\, d$ och **(1.4)** $A = \pi \frac{d^2}{4}$.

Längden *l* av en metallstav är en funktion av temperaturen *t* enligt lagen:

**(1.5)** $l = l_0\,(1 + \beta\, t)$, där $l_0$, längden vid $t = 0$, och $\beta$, längdutvidgningskoefficienten, är konstanter.

Trycket *p* hos en (ideell) gas är en funktion av volymen *v* enligt Boyles lag

**(1.6)** $p = \frac{k}{v}$, där *k* vid oförändrad temperatur hos gasen är en konstant. Låter vi även temperaturen variera, blir trycket en funktion av både volym och temperatur enligt den allmänna tillståndslagen:

**(1.7)** $p = \frac{R\,T}{v}$, där *R* är en konstant och *T* är gasens absoluta temperatur.

Med sådana funktioner av två eller flera oberoende variabler kommer vi inte att behandla i det följande.

Det är inte alltid möjligt att, såsom i de anförda exemplen, uttrycka ett funktionssamband genom en ekvation. Så är t.ex. trycket hos mättad vattenånga en funktion av temperaturen, trots att man

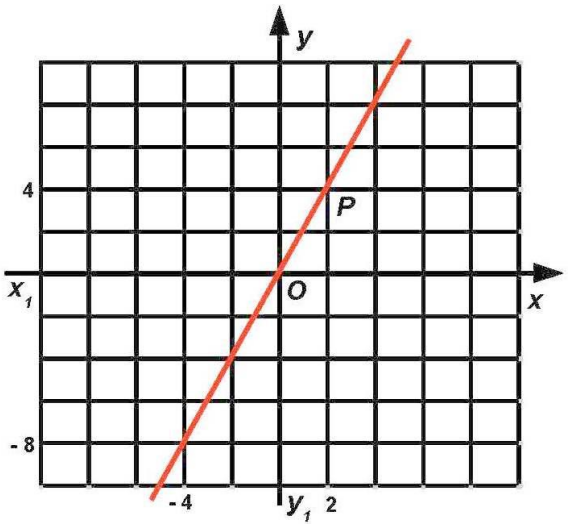



***Fig. 1.*** *Koordinatsystem*

inte ännu lyckats finna den matematiska funktionsformen[1]. I detta och dylika fall hjälper man sig med en på empirisk väg ställa upp en tabell eller ett matematiskt uttryck, som approximativt kan representera detta funktionssamband.
Man kan på följande sätt skaffa sig en överskådlig bild av hur en funktion $y=f(x)$ varierar med *x*.
Vi ritar nu upp två mot varandra vinkelräta[2] axlar, ***koordinataxlar*** $x_1\,x$ och $y_1\,y$ [3]. Deras skärningspunkt *O* benämns ***origo***, $x_1\,x$ ***abskissaxel*** **(***x-axel*) och $y_1\,y$ ***ordinataxel*** (*y-axel*).
Ett sammanhörande par av värden på variablerna, t.ex. $x=2$ och $y=4$, representeras av en punkt *P* i planet, som ligger på avståndet 2 från ordinataxeln och på avståndet 4 från abskissaxeln. Man kallar dessa avstånd punkten P:s koordinater: $x=2$ dess *abskissa* (*x*- koordinat) och $y=4$ dess *ordinata* (*y*-koordinat). (Betecknas variablerna med andra bokstäver än *x* och *y*, ändras uppenbarligen benämningarna inom parentes i enlighet därmed.) *P* betecknas som punkten (2, 4). Vid utsättande av punkten *P* tar man hänsyn till koordinaternas tecken, så att positiva värden vanligen avsättas från origo i de å figuren med pilar försedda riktningarna, negativa åt motsatt håll.
Planet delas genom axlarna i fyra ***axelvinklar*** eller ***kvadranter*** $x\,O\,y$ (1:a), $x_1\,O\,y$ (2:a), $x_1\,O\,y_1$ (3:e) och $x\,O\,y_1$ (4:e).
Alla de punkter, vilkas koordinater satisfiera ekvationen $y=f(x)$ bildar tillsammans en ***linje*** (***kurva***, ***diagram***), som utgör den grafiska (geometriska) bilden av funktionen $y=f(x)$. Linjens ekvation betecknas

**(1.8)** $y=f(x)$.

Åskådliggör man funktionen $y=2x$ [4] grafiskt genom att axelsystem pricka in t.ex. de i förut angivna tabell sammanställda värdeparen på *x* och *y*, finner man, att funktionskurvan blir en rät linje genom origo (fig. 1).

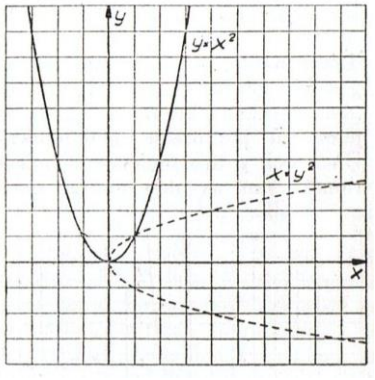



***Fig. 2.*** *Koordinatsystem*

Gör man på samma sätt med funktioren $y=x^2$, erhåller man en kroklinje, som går genom origo och ligger symmetriskt omkring positiva *y*-axeln (den heldragna kurvan i fig.2). Denna kurva kan sägas utgöra en" **grafisk *kvadrattabell*"**, då den kan utnyttjas för bestämning på kvadraten *y* på ett tal *x*.
Det tal, vars kvadrat skall erhållas, hittar vi tydligen på *x*-axeln, och motsvarande *y*-värde utgör den sökta kvadraten.
Men samma kurva kan man också omvänt använda för att dra kvadratroten ur ett tal, således som "**grafisk *kvadrattottabell***".

[1] År 1948.
[2] Axlarna behöver inte nödvändigtvis vara vinkelräta, man kan också använda ett snedvinkligt axelsystem.
[3] Se fig. 1.
[4] *y* är direkt proportionellt mot *x*; *proportionalitetsfaktorn* = 2.

# Begreppet derivata

## 2.1 Derivatans geometriska betydelse

*Om* $y = f(x)$, *kallar man* ***gränsvärdet*** $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ ***derivatan*** *av y med avseende på x.*

Namnet derivata[1] på $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ betyder, att detta gränsvärde utgör en av *y* härledd funktion av *x*.
Som kortare beteckning för denna funktion använder vi närmast $y'$ (läses *y*-prim). Alltså

Def.: **(2.1)** $y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$

Ett annat ofta använt sätt att beteckna samma gränsvärde är $\frac{dy}{dx}$; härom mera längre fram under **differentialer** och **differentiering**.

Att bestämma derivatan av en funktion kallas att ***derivera*** funktionen.

***Exempel 9.*** Derivera funktionen **(1)** $y = x^3 - 3x$.

Av den givna ekvationen får vi $y + \Delta y = (x + \Delta x)^3 - 3(x + \Delta x)$. Utvecklar vi parenteserna får vi **(2)** $y + \Delta y = x^3 + 3x^2 \cdot \Delta x + 3x \cdot (\Delta x)^2 + (\Delta x)^3 - 3x - 3\Delta x$. Ersätter vi *y* i **(2)** med *y* i **(1)** får vi $x^3 - 3x + \Delta y = x^3 + 3x^2 \cdot \Delta x + 3x \cdot (\Delta x)^2 + (\Delta x)^3 - 3x - 3\Delta x \rightarrow$
Vi kan förkorta bort de inledande två termerna i VL[2] och sedan dividerar vi båda leden med $\Delta x$ och får: $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 3x^2 - 3 + 3x \cdot \Delta x + (\Delta x)^2$ Gränsövergången när $\Delta x \to 0$ ger nu
$y' = 3x^2 - 3 + 0 + 0 \rightarrow y' = 3x^2 - 3$

Av vad som här anförts beträffande en kroklinjes stigning framgår, att ***derivatan geometriskt betyder stigningen hos funktionskurvan***. (Detta under förutsättning att funktionen avbildas i ett rätvinkligt axelsystem med samma enhet efter de båda axlarna. Definitionen på begreppet derivata är dock oberoende av det sätt, varpå man grafiskt representerar funktionen). Med kännedom om derivatan av en funktion kan man därför beräkna funktionens stigning i olika punkter. En **positiv** derivata anger, att kurvan är **stigande** (funktionen **växande**). En **negativ** derivata betyder, att kurvan är **fallande** (funktionen **avtagande**). Att derivatan är 0 innebär, att kurvans tangent går **parallellt** med *x*-axeln (**horisontellt**). Ju större derivatans numeriska värde är, desto hastigare växer (eller avtar) funktionen och desto mer vertikalt förlöper kurvan. Ju mindre det numeriska värdet är, desto långsammare växer (eller avtar) funktionen och desto mer horisontellt förlöper kurvan. En konstant derivata anger, att kurvan är en rät linje (funktionen linjär).

***Ex. 10.*** a) Bestäm, var funktionskurvan i föreg. ex. har horisontell tangent, där den varken är stigande eller fallande samt ange stigningen (och stigningsvinkeln i de punkter, där kurvan skär *x*-axeln).
b) Teckna kurvan.
Då derivatan $y'$ är en funktion av *x*, kan den, i likhet med den ursprungliga funktionen *y*, grafiskt representeras av en kurva, som man erhåller genom att avsätta $y'$ efter den vertikala och *x* efter den

[1] *Derivare* (lat.) = härleda.
[2] VL – vänstra ledet.

horisontella axeln. En sådan derivatakurva är det lämpligt att teckna för att uppnå överskådlighet beträffande derivatans variationer.

***Ex. 11.*** Åskådliggör grafiskt derivatan av den i föreg. ex. studerade funktionen. (Använd t.ex. samma axelsystem som för den ursprungliga funktionen).

## 2.2 Grafisk derivering

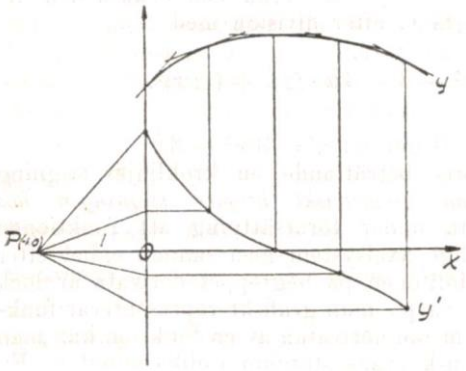



***Fig. 12.*** *Grafisk derivering*

Derivatas geometriska betydelse ger oss möjlighet, som ofta utnyttjas i den tillämpade matematiken, att även om funktionen endast föreligger i form av en kurva *y* (fig. 12), konstruera motsvarande derivatakurva *y*'. För detta ändamål drar man tangenter till *y* i tillräckligt många punkter och genom en punkt *P* (- 1, 0) med dessa tangenter parallella räta linjer. Genom dessa linjers skärningspunkt med *y*-axeln drar vi sedan vågräta linjer. Dessa träffar de genom motsvarande tangeringspunkter på kurvan *y* dragna lodräta linjer i punkter, som nu hamnar på derivatakurvan *y*'.

Genom de så erhållna punkterna kan kurvan *y*' ritas upp med hjälp av en kurvmall.[3] (Arbeta man med två vinkelhakar, underlättas konstruktionen med de parallella linjerna från $P_1$ till *y*-axeln, parallella med respektives punkts tangent på kurvan *y*.)

***Ex 12.*** Rita upp en godtycklig kurva y och konstruera motsvarande derivatakurva *y*'.

## 2.3 Derivatan av en konstant

I stället för att vid beräkning av varje funktions derivata som vi har gjort i det föregående då vi gick tillbaka till definitionen på derivatan, blir det i längden bekvämare att härleda vissa enkla funktioners derivator jämte några deriveringsregler för sammansatta funktioner.

Är $y = a$ (konstant), är *y* en funktion av *x*: Mot varje värde på *x* svarar ett bestämt värde på *y*, nämligen *a*. Får *x* tillskottet $\Delta x$, blir tydligen $\Delta y = 0$ Således är $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 0$ och

**(2.2)** $y' = 0.$

Resultatet framgår även grafiskt, då ekvationen $y = a$ representeras av en rät linje parallell med *x*-axeln och på avståndet *a* från axeln. Kurvans stigning och därmed derivatan är således konstant = 0.

## 2.4 Derivatan av potensfunktionen y = $x^n$ [4]

Ger man *x* tillskottet $\Delta x$, får *y* ett tillskott $\Delta y$, som bestäms ur ekvationen $y + \Delta y = (x + \Delta x)^n$ och ersätter vi *y* med $x^n$ [5] får vi $x^n + \Delta y = (x + \Delta x)^n \rightarrow \Delta y = (x + \Delta x)^n - x^n$. Dividerar vi nu båda leden med $\Delta x$ får vi $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(x + \Delta x)^n - x^n}{\Delta x}$.

För att kunna dividera högra ledet sätter vi $x + \Delta x = x_1 \rightarrow \Delta x = x_1 - x$

[3] Eller med hjälp av ett dataprogram, t.ex. ”Maple 16” eller liknande.
[4] *n* en konstant.
[5] Från potensfunktionen.

# Exponentialfunktionens derivata

För härledningen av denna funktion måste vi känna gränsvärdet av funktionen $\left(1+\frac{1}{z}\right)^z$, när $z$ växer över alla gränser. Följande tabell innehåller några $z$-värden jämte motsvarande med 3 decimaler angivna funktionsvärden.

| z | -10 000 | -1 000 | -100 | -10 | 1 | 2 | 3 | 4 | 10 | 100 | 1 000 | 10 000 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\left(1+\frac{1}{z}\right)^z$ | **2,718** | 2,720 | 2,732 | 2,868 | 2,000 | 2,250 | 2,370 | 2,441 | 2,594 | 2,705 | 2,717 | **2,718** |

***Tabell 4.*** *Gränsvärdet av funktionen e*

För $z$-värden numeriskt större än de i tabellen upptagna får vi samma funktionsvärden (med den angivna noggrannheten), som tabellen visar för $\pm 10\,000$. Detta låter oss förmoda (det stränga beviset utelämnar vi här), att funktionen närmar sig ett gränsvärde, när ***z*** växer över alla gränser. Detta gränsvärde, som är ett irrationellt tal, betecknas med ***e*** och utgör bas i det naturliga logaritmsystemet. Närmevärdet med 9 decimaler: $e = 2.718281828$ (Angående dess beräkning, se oändliga serier sid. 232.)[1]

Vi härleder nu derivatan av exponentialfunktionen

**(3.1)** $y = a^x$ **(1)** ($a$ en positiv konstant).

Vi tillför $x$ som vanligt tillskottet $\Delta x$. Motsvarande tillskott $\Delta y$ i $y$ får vi ur ekvationen

**(2)** $y + \Delta y = a^{x+\Delta x}$. Ersätter vi ***y*** **i (2)** med $a^x$ från **(1)** och subtraherar båda leden med $a^x$ får vi

$$\Delta y = a^{x+\Delta x} - a^x \rightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{a^{x+\Delta x} - a^x}{\Delta x} \rightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} = a^x \cdot \frac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x};$$

För att nu vid gränsövergången få användning för det ovan angivna gränsvärdet sätter vi det sista brråkets täljare **(3)** $a^{\Delta x} - 1 = \frac{1}{z} \rightarrow a^{\Delta x} = 1 + \frac{1}{z}$, och efter logaritmering får vi

**(4)** $\Delta x = \log_a\left(1+\frac{1}{z}\right)$. Vi får nu $\frac{\Delta y}{\Delta x} = a^x \cdot \frac{1}{z \cdot \log_a\left(1+\frac{1}{z}\right)} \rightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} = a^x \cdot \frac{1}{\log_a\left(1+\frac{1}{z}\right)^z}$.

Låter vi nu $\Delta x$ gå mot noll, går $z$ mot oändligheten ( $a^{\Delta x}$ går nämligen mot värdet 1 och därmed $\frac{1}{z}$ mot noll). Alltså

**(3.2)** $$y' = a^x \cdot \frac{1}{\log_a(e)}.$$

Då emellertid $\log_a(e) = \frac{1}{\log_e(a)} = \frac{1}{\ln(a)}$, kan vi även skriva

**(3.3)** $$y' = a^x \cdot \ln(a).$$

Är speciellt $a = e$, alltså $y = e^x$, blir derivatan

[1] Exempel 170.

**(3.4)** $y' = e^x$,

enär $\ln(e) = 1$.

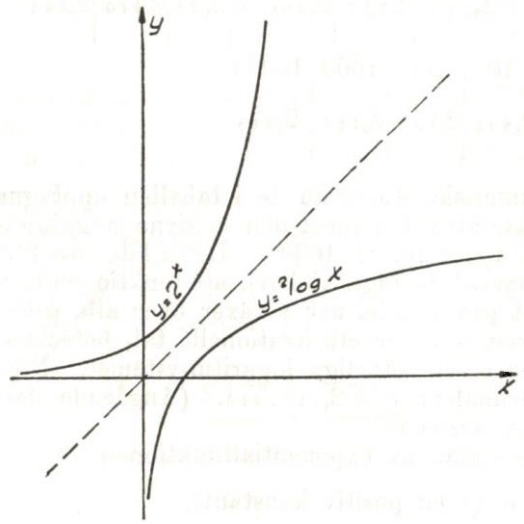



***Fig. 13.*** *Exponentialkurvan* $y = 2^x$

Exponentialkurvan $y = a^x$, som i fig. 13 är ritad för $a = 2$, är ständigt stigande eller ständigt fallande, allteftersom $a$ är större eller mindre än 1, då derivatan är positiv, resp. negativ.

***Ex. 24.*** a) Beräkna stigningen och stigningsvinkeln hos kurvan $y = 2^x$ i den punkt, där kurvan skär $y$-axeln.

b) Samma uppgift för kurvan $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

c) Rita kurvan.

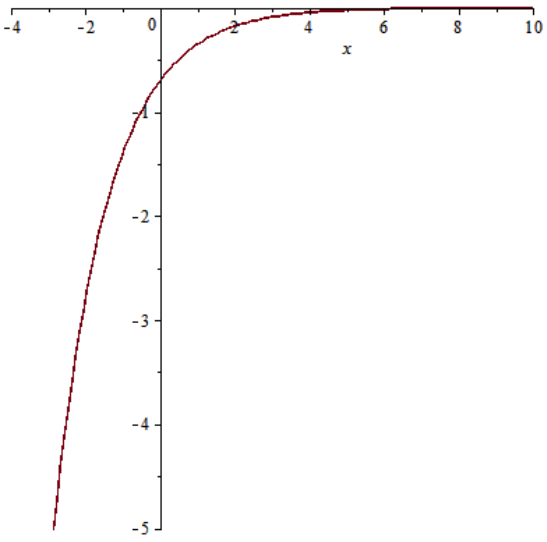
***Ex. 25.*** Derivera $y = e^{x^3}$ (funktion av en funktion).

## 3.1 Lösningsförslag

***Ex. 24.*** a) För $y = 2^x$ är derivatan $y' = 2^x \cdot \ln(2)$ och för $x = 0$ får vi
$y' \approx 1 \cdot 0.693 \rightarrow \tan(0.693) \approx 34.73^\circ$

b) För $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ är derivatan $y' = \left(\frac{1}{2}\right)^x \cdot \ln\left(\frac{1}{2}\right)$ och för $x = 0$ får vi
$y' \approx 1 \cdot (-0.693) \rightarrow \tan(-0.693) \approx -0.012^\circ$

c)




***Graf. 15.*** *Exponentialkurvan* $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

# Logaritmfunktionens derivata

Logaritmfunktionen $y = \log_a(x)$ ($a$ en pos. konstant, logaritms bas) kan deriveras med kännedom om exponentialfunktionens derivata. Enligt logaritmdefinitionen kan funktionsekvationen skrivas

**(4.1)** $$a^y = x$$

Deriveras denna ekvations båda led med avseende på $x$ under iakttagande av, att vänstra ledet är en funktion av en funktion, får vi

$$a^y \cdot \ln(a) \cdot y' = 1 \rightarrow y' = \frac{1}{a^y \cdot \ln(a)} \text{ eller}$$

**(4.2)** $$y' = \frac{1}{x} \cdot \log_a(e)$$

Är speciellt $a = e$, alltså $y = \ln(x)$, blir

**(4.3)** $$y' = \frac{1}{x}$$

Logaritmfunktionen är avbildad i fig. 13 för $a = 2$ Då denna funktion är den inversa exponentialfunktionen, kan den ena funktionskurvan erhållas av den andra på sid 3 angivet sätt (se fig. 3).

***Ex 26.*** Beräkna stigningen och stigningsvinkel hos kurvan $y = \log_2(x)$ i den punkt, där kurvan skär $x$-axeln.

***Ex 27.*** Derivera $y = \log_5\left(1 + 3x^2\right)$ (funktionen av en funktion).

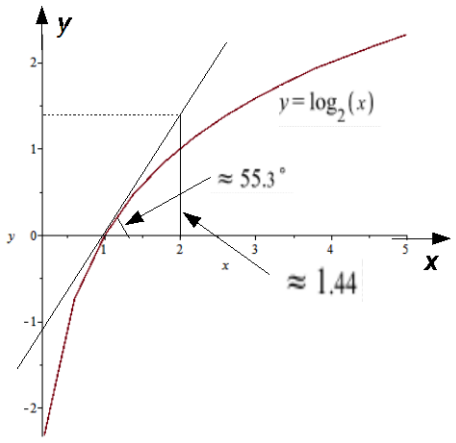
Svar: $y' = \frac{\log_5(e)}{1 + 3x^2} \cdot 6x$;

## 4.1 Lösningsförslag

***Ex 26.*** Eftersom $m = \log_a(c) \rightarrow a^m = c$ får vi när $y = 0$ för uttrycket $y = \log_2(x)$

$0 = \log_2(x) \rightarrow 2^0 = x \rightarrow 1 = x$ Vi ser nu att kurvan skär $x$-axeln vid $x$ = 1.

Sätter vi in olika värden på $x$ och plottar dem får vi:



***Graf. 16**. Funktionen* $y = \log_2(x)$

Derivatan av uttrycket är $y' = \frac{1}{x} \cdot \log_2(e) \rightarrow y' = \frac{1}{x} \cdot \frac{\log_e(e)}{\log_e(2)} = \frac{1}{x} \cdot \frac{\ln(e)}{\ln(2)} \rightarrow$ [1]

$\rightarrow y' = \frac{1}{1} \cdot \frac{1}{0.693147} = 1.442695 \rightarrow \wedge$ för $\arctan(1.442695) \approx 55.27^\circ \approx 55.3^\circ$

***Ex 27.*** Derivatan av $y = \log_5(1 + 3x^2)$ blir $y' = \frac{\log_5(e)}{(1 + 3x^2)} \cdot 6x \rightarrow$

$\rightarrow y' = \frac{6}{\ln(5)} \cdot \frac{x}{1 + 3x^2} \rightarrow y' \approx \frac{3.7281\,x}{1 + 3x^2}$

## 4.2 Övningsuppgifter

### Derivera följande funktioner:

***ö117.*** $y = 3\ln(x)$ ; ***ö118.*** $y = \log_a(x^2)$ ; ***ö119.*** $y = \ln(\sqrt{x})$ ; ***ö120.*** $y = \ln\left(\frac{1}{x^3}\right)$ ;

***ö121.*** $y = x \cdot \ln(x)$ ; ***ö122.*** $y = 5x^2 \cdot \log_a(x^3)$ ; ***ö123.*** $y = \frac{\ln(x)}{x}$ ; ***ö124.*** $y = \frac{x}{\log_a(x)}$ ;

***ö125.*** $y = \frac{(x+1) \cdot \ln(x)}{x}$ ; ***ö126.*** $y = \frac{\ln(x)}{e^x}$ ; ***ö127.*** $y = 2\sqrt{x} \cdot \log_e(x)$ ;

---

***ö128.*** $y = \ln(2 + 3x)$ ; ***ö129.*** $y = \ln(a + bx)$ ***ö130.*** $y = \log_a(1 + x^2)$ ;

***ö131.*** $y = \frac{\ln(x+1)}{x^2 - 1}$ ; ***ö132.*** $y = 2\,(1 + x \cdot \ln(x))^3$ ; ***ö133.*** $y = \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$ ;

***ö134.*** $y = (\ln(x))^2$ ; ***ö135.*** $y = \frac{m \cdot n(\log_a(e))^{n-1}}{x}$ ; ***ö136.*** $y = \sqrt{\ln(x)}$ ;

***ö137.*** $y = \ln\left(\sqrt{3 + x^2}\right)$ ; ***ö138.*** $y = \ln(a + \sqrt{x})^2$ ; ***ö139.*** $y = \ln\left(x + \sqrt{1 + x^2}\right)$ ;

***ö140.*** $y = \log_a\left(\frac{x}{\sqrt{1 + x^2}}\right)$ ; ***ö141.*** $y = \ln(\ln(x))$ ;

***ö142.*** $y = \ln\left(\frac{(x-a)^2}{x+a}\right) + \ln\left(\frac{x+a}{x-a}\right)$ ; ***ö143.*** $y = \ln(e^x + 1)^2 - x$ ;

***ö144.*** $y = \ln(1 + e^x) - \frac{1}{e^x} - x$ ; ***ö145.*** $y = \ln\left(\frac{a^x - b}{a^x + b}\right)$ ;

[1] Se S. Eriksson, Matematik Del I, (8.6) sid. 106 .

# De trigonometriska funktionernas derivator

För härledningen behöver vi kännedom om gränsvärdet av **(1)** $\frac{\sin(\alpha)}{\alpha}$ när α går mot noll.

Låt α (fig. 14) vara en spetsig vinkel mätt i bågmått (radianer[1]). **Cirkelbågen *A B*** är alltså, α längdenheter om radien = 1 längdenhet. Vidare är $OA = OB = 1$, $BC = \sin(\alpha)$ och $OC = \cos(\alpha)$ samt $AD = \tan(\alpha)$ .

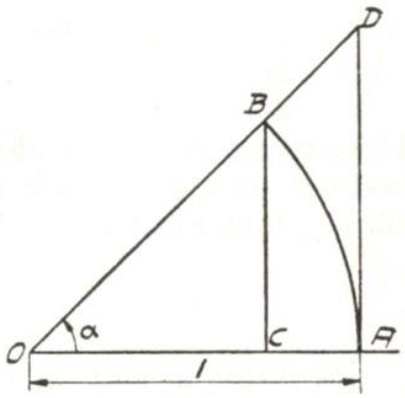



***Fig. 14.*** *Rätvinklig triangel OAD*

Vidare är:

arean för triangeln: **(2)** $OBC = \frac{1}{2}\sin(\alpha)\cdot\cos(\alpha)$

”- sektorn: **(3)** $OBA = 1\cdot 1\cdot\pi\cdot\frac{\alpha}{2\pi} = \frac{1}{2}\alpha$

”- triangeln: **(4)** $ODA = \frac{1}{2}\tan(\alpha)$

Enligt fig. 14 får vi följande samband:

triangeln $OBC$ < sektorn $OBA$ < triangeln $ODA$ eller

**(5)** $\frac{1}{2}\sin(\alpha)\cdot\cos(\alpha) < \frac{1}{2}\alpha < \frac{1}{2}\tan(\alpha)$.

[1] Detta vinkelmått, det vanliga vid studiet av vinkelfunktioner, förutsätter vi i det följande.

Dividerar vi nu uttrycken **(5)** med $\frac{1}{2}\sin(\alpha)$ (positivt), får vi

**(5.1)** $$\cos(\alpha) < \frac{\alpha}{\sin(\alpha)} < \frac{1}{\cos(\alpha)}$$

Går nu α mot noll, närmar sig $\cos(\alpha)$ och $\frac{1}{\cos(\alpha)}$ obegränsat värdet 1, varför även $\frac{\alpha}{\sin(\alpha)}$, och därmed också $\frac{\sin(\alpha)}{\alpha}$, går mot samma värde 1. Vi har alltså funnit genom induktion:

**(5.2)** $$\boxed{\lim_{\alpha \to 0} \frac{\sin(\alpha)}{\alpha} = 1}$$

**OBS!** Vi kan inte *direkt* bevisa satsen, men väl genom induktion.

Då $\frac{\sin(-\alpha)}{-\alpha} = \frac{\sin(\alpha)}{\alpha}$ inses, att satsen gäller även om α närmar sig 0 från den negativa sidan. (Enligt satsen kan sinus för en liten vinkel med god approximation bytas ut mot vinkeln, mätt i bågmått.)

## 5.1 Sinusfunktionens derivata

**(1)** $y = \sin(x)$

Om vi ökar $x$ med $\Delta x$ ges även $y$ ett tillskott $\Delta y$.

**(2)** $y + \Delta y = \sin(x + \Delta x) \quad \rightarrow \Delta y = \sin(x + \Delta x) - y$ **(3)**

Ersätter vi nu $y$ i **(3)** med $y$ från **(1)** får vi $\rightarrow \Delta y = \sin(x + \Delta x) - \sin(x)$ **(4)**

Enligt additionssatsen för sinus[2] får vi:

$\rightarrow \Delta y = \sin(x)\cdot\cos(\Delta x) + \cos(x)\cdot\sin(\Delta x) - \sin(x)$ **(5)**

Genom omflyttning får vi:

$\Delta y = \cos(x)\cdot\sin(\Delta x) + \sin(x)\cdot\cos(\Delta x) - \sin(x)$ **(6)**

Genom utbrytning av $\sin(x)$ får vi:

$\rightarrow \Delta y = \cos(x)\cdot\sin(\Delta x) + \sin(x)\cdot\cos(\Delta x - 1)$ **(7)**

Genom tillämpning av formeln för dubbla vinkeln för sinus[3] och cosinus[4] får vi

$$\Delta y = \cos(x)\cdot\left(2\cdot\sin\left(\frac{1}{2}\Delta x\right)\cdot\cos\left(\frac{1}{2}\Delta x\right)\right) + \sin(x)\cdot\left(\left(\cos^2\left(\frac{1}{2}\Delta x\right) - \sin^2\left(\frac{1}{2}\Delta x\right) - 1\right)\right)$$ **(8)**

Genom utbyte av den ”trigonometriska ettan” [5], får vi:

**(9)** $$\Delta y = 2\cos(x)\cdot\left(\sin\left(\frac{1}{2}\Delta x\right)\cdot\cos\left(\frac{1}{2}\Delta x\right) + \sin(x)\cdot\left(\cos^2\left(\frac{1}{2}\Delta x\right) - 2\cdot\sin^2\left(\frac{1}{2}\Delta x\right) - \cos^2\left(\frac{1}{2}\Delta x\right)\right)\right.$$

[2] Se **(20.3)** sid. 247 Del I, $\sin(\alpha + \beta) = \sin(\alpha)\cdot\cos(\beta) + \cos(\alpha)\cdot\sin(\beta)$

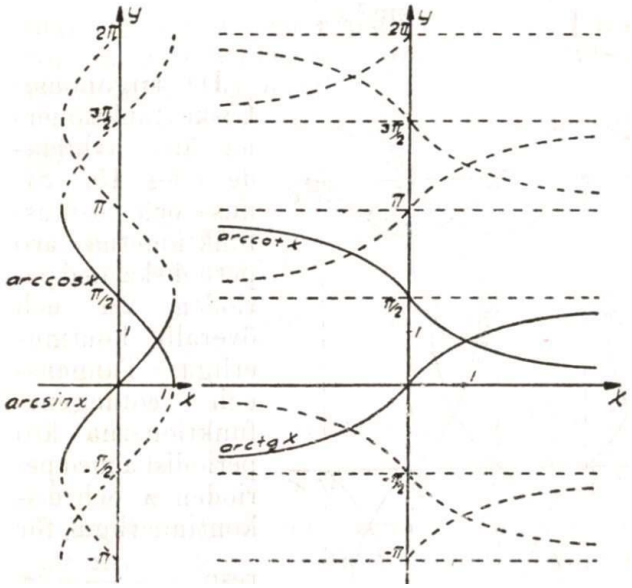
[3] Se **(20.7)** sid. 248 Del I, $\sin(2\alpha) = 2\sin(\alpha)\cdot\cos(\alpha)$

[4] Se **(20.8a)** sid. 248 Del I, $\cos(2\alpha) = \cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha)$

[5] Se **(12.5)** sid. 176 Del I, $\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1$

# De cyklometriska funktionernas derivator

Det har visat sig ändamålsenligt att införa och räkna med de inversa trigonometriska funktionerna (liksom man t.ex. infört logaritmfunktionen som den inversa exponentialfunktionen). Dessa nya funktioner kallas cyklometriska eller arcusfunktioner. För den inversa sinusfunktionen användes skrivsättet $y = \arcsin(x)$ som anger, att $y$ är den båge[1] (arcus), vars sinus är $x$ eller $\sin(y) = x$.
Övriga arcusfunktioner är $\arccos(x)$, $\arctan(x)$ och $\operatorname{arccot}(x)$. Funktionskurvorna, får vi från motsvarande trigonometriska kurvor genom ombyte av $x$- och $y$-axlarna, se fig. 16.




Vi ser, att mot varje $x$-värde svarar oändligt många $y$-värden och att funktionerna, som de här definieras, alltså är oändligt mångtydiga.

För att få dem entydiga får vi begränsa kurvorna till de i fig. 16 heldragna delarna, som sträcker sig mellan $y$-värdena

$-\frac{\pi}{2}$ och $+\frac{\pi}{2}$ för

$\arcsin(x)$ och $\arctan(x)$, och mellan $y$-värdena $0$ och $\pi$ för $\arccos(x)$ och $\operatorname{arccot}(x)$.

***Fig. 16.*** *De cyklometriska funktionskurvorna*

Derivatorna av de cyklometriska funktionerna kan vi med kännedom om motsvarande trigonometriska funktionernas derivator härleda på följande sätt.

**(6.1)** $y = \arcsin(x)$ - kan skrivas:
**(6.2)** $\sin(y) = x$

Denna ekvations båda led deriverar vi nu med avseende på $x$ under iakttagande av, att vänstra ledet är en funktion av en funktion av $x$. Vi får:

$$\cos(y)\cdot y' = 1 \rightarrow y' = \frac{1}{\cos(y)} \rightarrow y' = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2(y)}} \rightarrow y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$\because$ **(6.3)** $\begin{cases} y = \arcsin(x) \\ y' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} \end{cases}$

[1] OBS, att vinkeln här redovisas i bågmått.

Endast det positiva tecknet framför rotmärket kommer ifråga, då $\arcsin(x)$ enligt den gjorda inskränkningen alltid är växande och dess derivata alltid positiv.

Med samma metod får vi:

**(6.4)** $y = \arccos(x)$ kan skrivas

**(6.5)** $\cos(y) = x$ som deriveras på samma sätt som ovan

$$\cos(y) = x \rightarrow -\sin(y)\cdot y' = 1 \rightarrow y' = -\frac{1}{\sin(y)} \rightarrow y' = -\frac{1}{\sqrt{1-\cos^2(y)}} \rightarrow y' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

Här väljs minustecknet, då $\arccos(x)$ är en avtagande funktion.

$\because$ **(6.6)** $\begin{cases} y = \arccos(x) \\ y' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} \end{cases}$

**(6.7)** $y = \arctan(x)$ kan skrivas

**(6.8)** $\tan(y) = x$ som deriveras på samma sätt som ovan

$\tan(y) = x \rightarrow \dfrac{1}{\cos^2(y)}\cdot y' = 1 \rightarrow y' = \cos^2(y) \rightarrow$ Genom att dividera HL med 1[2] får vi

$\rightarrow y' = \dfrac{\cos^2(y)}{\cos^2(y) + \sin^2(y)}$ som efter förkortning av täljare och nämnare med $\cos^2(y)$ får vi

$\rightarrow y' = \dfrac{1}{1+\tan^2(y)}$ men enligt **(6.8)** är $\tan(y) = x$ så vi kan skriva $\rightarrow y' = \dfrac{1}{1+x^2}$

$\because$ **(6.9)** $\begin{cases} y = \arctan(x) \\ y' = \dfrac{1}{1+x^2} \end{cases}$

På analogt sätt får vi:

**(6.10)** $y = \operatorname{arccot}(x)$ kan skrivas

**(6.11)** $\cot(y) = x$ som deriveras på samma sätt som ovan

$\cot(y) = x \rightarrow -\dfrac{1}{\sin^2(y)}\cdot y' = 1 \rightarrow y' = -\sin^2(y) \rightarrow$ Genom att dividera HL med 1får vi

$\rightarrow y' = -\dfrac{\sin^2(y)}{\sin^2(y) + \cos^2(y)} \rightarrow$ som efter förkortning av täljare och nämnare med $\sin^2(y)$ får vi

$\rightarrow y' = -\dfrac{1}{1+\cot^2(y)}$ men enligt **(6.11)** är $\cot(y) = x$ så vi kan skriva $\rightarrow y' = -\dfrac{1}{1+x^2}$

$\because$ **(6.12)** $\begin{cases} y = \operatorname{arccot}(x) \\ y' = -\dfrac{1}{1+x^2} \end{cases}$

[2] $1 = \cos^2(y) + \sin^2(y)$

# Några funktioners derivator

## 7.1 Derivering av funktioner i implicit form

En ekvation innehållande *x* och *y* som inte är löst med avseende på *y*, framställer y som funktion i **implicit**[1] form av *x*. Vill man bestämma *y*:s derivata med avseende på *x*, kan man ofta ur ekvationen lösa ut *y*, och därmed erhålla funktionen i **explicit**[2] form, och sedan verkställa deriveringen.

***Ex 30.*** Derivera $x^2 + y^2 = a^2$ (*a* en konstant, radien i den cirkel, som ekvationen representerar), ger

$x^2 + y^2 = a^2 \rightarrow y^2 = a^2 - x^2 \rightarrow y = \pm\sqrt{a^2 - x^2}$ som efter derivering ger

$y' = \pm\frac{1}{2}\cdot\frac{-2x}{\sqrt{a^2 - x^2}} \rightarrow y' = \mp\frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}}$ ;

(De övre tecknen, likaså de undre, i *y* och *y*' motsvarar varandra; funktionen är tvåtydig.)

Man kan emellertid också derivera ekvationen direkt med avseende på *x* enligt den metod, som förut upprepande gånger använts vid härledning av inversa funktionens derivator. Här har man att iakttaga, att *y* är en funktion av *x*.

***Ex 31.*** Deriverar man föregående exempel enligt detta får vi:

$x^2 + y^2 = a^2 \rightarrow 2x + 2y\cdot y' = 0 \rightarrow y' = -\frac{2x}{2y} \rightarrow y' = -\frac{x}{y}$ ;

I derivatan ingår här *y*, vilket gör den till formen enklare, men då *y* är en funktion av *x*, blir också derivatan en funktion enbart av *x*.

Att det senast erhållna uttrycket på *y*' överensstämmer med det förut funna värdet, framgår vid insättning av den explicita *y*-funktionen. Om funktionen inte kan ges i explicit form, är det sist visade deriveringsexemplet det enda användbara. $y' = -\frac{x}{y} \rightarrow y' = -\frac{x}{\pm\sqrt{a^2 - x^2}} \rightarrow y' = \mp\frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}}$

***Ex 32.*** Sök *y*', om $y = x\cdot e^y$. **(1)**

Här kan vi inte lösa ut *y*, utan deriveras ekvationen med avseende på *x*, får vi:

$y' = x\cdot e^y\cdot y' + e^y \rightarrow y' - x\cdot e^y\cdot y' = e^y \rightarrow y'\cdot\left(1 - x\cdot e^y\right) = e^y \rightarrow y' = \frac{e^y}{1 - x\cdot e^y}$ **(2),**

men **(1)** kan skrivas $e^y = \frac{y}{x}$ **(3)**. Sätter vi in $e^y$ från **(3)** i **(2)** får vi $y' = \frac{e^y}{1 - x\cdot e^y} \rightarrow y' = \frac{\frac{y}{x}}{1 - x\cdot\frac{y}{x}}$

som efter förlängning med $x \rightarrow y' = \frac{y}{x(1 - y)}$ ;

***Ex 33.*** Sök *y*', om $x^3 + xy + y^3 = 5$ ;

Efter derivering får vi:

$3x^2 + x\cdot y' + y + 3y^2\cdot y' = 0 \rightarrow y'\left(x + 3y^2\right) = -\left(3x^2 + y\right) \rightarrow y' = -\frac{3x^2 + y}{x + 3y^2}$

[1] Underförstådd, indirekt.
[2] tydlig, direkt.

## 7.2 Logaritmisk derivering

Det kan ofta vara lämpligt att först *e*-logaritmera en funktion och sedan derivera den då erhållna implicita funktionen. Vi kan med fördel tillämpa metoden, om funktionen utgörs av en produkt eller kvot av flera funktioner, då den är logaritmerbar.

***Ex 34.*** Derivera funktionen $y=\sqrt{x}\,(x-2)\,\sqrt[3]{x+3}$ **(1)**;
Vi *e*-logaritmerar likheten och får $\ln(y)=\frac{1}{2}\ln(x)+\ln(x-2)+\frac{1}{3}\ln(x+3)$ som efter derivering blir $\frac{1}{y}\cdot y'=\frac{1}{2x}+\frac{1}{x-2}+\frac{1}{3(x+3)}$ **(2)**; Genom att ersätta *y* i **(2)** med *y* i **(1)** får vi

$$\rightarrow \frac{1}{\sqrt{x}\,(x-2)\,\sqrt[3]{x+3}}\cdot y'=\frac{1}{2x}+\frac{1}{x-2}+\frac{1}{3(x+3)}\rightarrow$$

$$\rightarrow y'=\left(\sqrt{x}\,(x-2)\,\sqrt[3]{x+3}\right)\cdot\left(\frac{1}{2x}+\frac{1}{x-2}+\frac{1}{3(x+3)}\right)\rightarrow$$

$$\rightarrow y'=\frac{3\cdot(x^2+3x-2x-6)+6x^2+18x+2x^2-4x}{6x(x-2)(x+3)}\rightarrow y'=\frac{11x^2+17x-18}{6x(x-2)(x+3)}$$

, som efter hyfsning och insättning av den givna funktionen ger $\rightarrow y'=\frac{11x^2+17x-18}{6\sqrt{x}\cdot\sqrt[3]{(x+3)^2}}$.

Denna metod ger oss även en möjlighet att kunna derivera ett exponentialuttryck, där både bas och exponent är variabla.

***Ex 35.*** Derivera $y=x^{x^2}$;
Vi får efter logaritmering $\ln(y)=x^2\cdot\ln(x)$ och efter derivering

$$\frac{1}{y}y'=x^2\cdot\frac{1}{x}+2x\cdot\ln(x)\rightarrow y'=xy\,(1+2\ln(x))\rightarrow y'=xy\ln\left(ex^2\right)$$

Metoden kan man också använda för att allmänt härleda derivatan av funktionen $x^n$, där n får vara ett godtyckligt reellt tal.

## 7.3 Derivatan av potensfunktionen $y = x^n$ [3]

Av $y=x^n$ **(1)** får vi efter logaritmering $\ln(y)=n\cdot\ln(x)$ som efter derivering blir
$\frac{1}{y}\cdot y'=\frac{n}{x}\rightarrow y'=n\cdot\frac{y}{x}$ **(2)**. Ersätter vi *y* i **(2)** med *y* i **(1)** får vi

$$\rightarrow y'=n\cdot\frac{x^n}{x}\rightarrow y'=n\cdot x^{n-1}$$

$\because$ **(7.1)** $\begin{cases} y=x^n \\ y'=n\cdot x^{n-1} \end{cases}$.

[3] *n* en konstant.

# Funktioners maximi- och minimivärden

Betraktar vi kurvan i fig. 17, ser vi, att i punkt *A* är *y*-värdet (ordinatan) större, i punkt *B* mindre än i närmast angränsade punkter på kurvan.

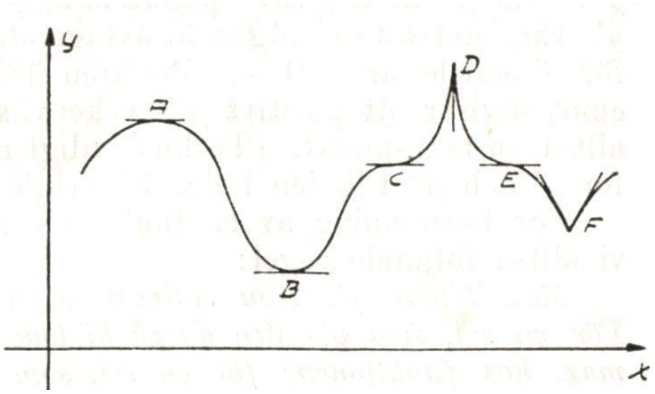



***Fig. 17.*** *Maximi- och minimivärden*[1]

Man kallar *A* en ***maximipunkt*** och *B* en ***minimipunkt***. Den funktionen, som kurvan representerar, säges för det mot punkten *A* svarande *x*-värdet ha ett ***maximi***värde och ett ***minimivärde*** för det *x*-värde, som hör till punkten *B*. Då kurvans tangent i såväl *A* som *B* löper parallellt med *x*-axeln, framgår av derivatans geometriska betydelse, att $y' = 0$ i både i max- och min-punkter. Då kurvan emellertid före en max-punkt är stigande och efter densamma fallande (som vanligt i pos. *x*-axelns riktning) går $y'$ i en sådan punkt över från positivt till negativt värde. I en minimipunkt blir förhållandet omvänt.

I punkterna *C* och *E*, som tydligen inte är max.- eller min.-punkter, är också tangenten parallell med *x*-axeln och således $y' = 0$, men $y'$ ändrar inte där tecken, ty på båda sidor om *C* och (*E*) är kurvan stigande (fallande) och därför derivatan $y'$ positiv (negativ). Punkterna *C* och *E* är ***inflexionspunkter***[2] med vågrät tangent[3].

Det utmärkande för max.- och min.-punkter är alltså, att $y'$ i dem ***byter tecken***. Om $y'$ är en kontinuerlig funktion, kan teckenväxling inte ske utan att $y'$ passerar värdet 0. (Punkten *D*, i fig. 17, kan även anses vara en max.-punkt, liksom *F* en min.-punkt, och $y'$ byter också där tecken, i det $y'$ i *D* slår över från $+\infty$ till $-\infty$ och i *F* från ett visst ändligt negativt till ett ändligt positivt värde, men $y'$ antar inte värdet 0 i *D* och *F*. I fortsättningen bortser vi från sådana max.- och min.-punkter, där $y'$ och även *y*, är diskontinuerlig[4]

För att bekvämt bestämma, hur derivatans tecken ändras i den punkt där $y' = 0$ d.v.s. avgörs om punkten är en max.- eller min.-punkt, bildar vi funktionens 2:a derivata $y''$. Om $y''$ är negativ i punkten, anger detta, att den funktion $y'$, vars derivata $y''$ utgör, är avtagande och att teckenväxlingen för $y'$ således är $+\ 0\ -$. Punkten är då en ***max.-punkt***. Däremot utvisar ett positiv $y''$ teckenväxlingen $-\ 0\ +$ för $y'$ och alltså en ***min.-punkt***. (Teckna enligt metoden grafisk derivering, fig. 12[5], kurvorna för $y'$ och $y''$ till den i fig. 17 avbildade funktionen.)

För bestämning av en funktions max.- och min.-värden får vi alltså följande regel:

*Man bildar $y'$, som **sätts = 0,** varpå denna ekvation löses. För en rot, som gör den därpå bildade $y''$ **negativ**, förligger ett **max**. hos funktionen; för en rot, som gör $y''$ **positiv**, föreligger ett **min**.*[6]

---

[1] Det är uppenbarligen inte fråga om *absolut* största eller minsta *y*-värdet, utan om ett *relativt* max.- eller min.-värde.

[2] Inflexionspunkt = vändpunkt.

[3] Se sid 75.

[4] Se även ex. ***ö341***, och ***ö342*** i övningsuppgifterna.

[5] Sid 16.

[6] Minnesregel för tecknet hos $y''$ : neg***a***tiv – m***a***x., pos***i***tiv – m***i***n.

***Exempel 41.*** Sök max. och min. av funktionen $y = x^3 - 6x^2 + 9x + 3$ .

Derivering ger $y' = 3x^2 - 12x + 9$ som blir 0 för $x$ = 1 och 3.

$y'' = 6(x - 2)$ är neg. för $x$ = 1 och pos. för $x$ = 3.

$\because y_{max} = 7$ för $x$ = 1, $y_{min} = 3$ för $x$ = 3. Teckna kurvan!

***Exempel. 42.*** Sök max. och min. av funktionen $y = \frac{x}{1+x^2}$ ;

$$\rightarrow y' = \frac{(1+x^2)\cdot 1 - x\cdot 2x}{(1+x^2)^2} \rightarrow \quad y' = \frac{1+x^2-2x^2}{(1+x^2)^2} \rightarrow y' = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2} \text{ blir 0för } x = \pm 1.$$

$y''_0 = \frac{(1+x^2)^2\cdot(-2x) - 0}{(1+x^2)^4}$ ; Detta uttryck på $y''$ gäller endast för de $x$-värden, som här intresserar oss, nämligen de, som gör $y' = 0$ (därav beteckningen $y''_0$ ). Tecknet för $y''_0$ bestäms tydligen av $-2x$, då de övriga faktorerna är kvadrater och därför alltid positiva.

$y_{max} = \frac{x}{1+x^2}$ för $x = 1, \rightarrow y_{max} = \frac{1}{1+1^2} = \frac{1}{2}$ ; $y_{min} = \frac{x}{1+x^2}$ för $x = -1, \rightarrow y_{min} = \frac{-1}{1+(-1)^2} = -\frac{1}{2}$

$\because y_{max} = \frac{1}{2}$ för $x = 1$ ; $y_{min} = -\frac{1}{2}$ för $x = -1$ .

Det kan vid insättning i $y''$ av rötter till ekvationen $y' = 0$ inträffa, att även $y'' = 0$. Vi får då hålla oss till 1:a derivatan och undersöka, om den byter tecken och i så fall i vilken riktning. (Man kan också undersöka högre derivator än den 2:a, men som vi inte här går in på)

***Exempel. 43.*** Sök max. och min. av funktionen $y = x^3$.

$y' = 3x^2$ blir 0 för $x$ = 0 ; $y'' = 6x$ blir också 0 för $x$ = 0. Nu är $y'$ alltid pos. och ändrar därför inte tecken. Det funna $x$-värdet ger då varken max. eller min. (Motsvarande punkt på kurvan är en ***inflexionspunkt*** med vågrät tangent, jämför punkt $C$ i fig. 17.) Teckna kurvan.

***Exempel. 44.*** Sök max. och min. av funktionen $y = (2 - x)^4 + 1$ ;

$y' = -4(2 - x)^3$ blir 0 för $x$ = 2, vilket också inträffar med $y''$. Vi finner för $y'$ teckenväxlingen $- 0 +$, när $x$ passerar värdet 2. $\because y_{min.} = 1$ för $x = 2$. Teckna kurvan.

Föreligger funktionen i ***implicit form***, kan vi gå tillväga på följande sätt, som visas i de följande exemplen:

***Exempel. 45.*** Sök max. och min. av funktionen **(1)** $x^2 + y^2 - xy - 3 = 0$ ;

Derivering ger $2x + 2y\cdot y' - 4 - y' - y = 0 \rightarrow y'(2y - x) = y - 2x \rightarrow$

$$\rightarrow y' = \frac{(y-2x)}{(2y-x)}\cdot\frac{-1}{-1} \rightarrow y' = \frac{2x-y}{x-2y};$$ **(2)** som blir 0 för $y = 2x$. Denna ekvation **(2)** bildar tillsammans med den ursprungliga **(1)** ett ekvationssystem, vars lösning[7] utgörs av rotsystemen

$$\begin{cases} x_1 = 1 \\ y_1 = 2 \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 = -1 \\ y_2 = -2 \end{cases};$$

Vi bildar nu 2:a derivatan och får $y''_0 = \frac{(x-2y)(2-y') - 0}{(x-2y)^2}$ ; Då nämnaren är kvadratisk och $y'$ i täljaren är 0, bestäms tecknet hos $y''_0$ av $x - 2y$ , som blir neg. för det första $(1 - 2\cdot 2)$ , men pos. för det andra $(-1 - 2\cdot(-2))$ rotsystemet.

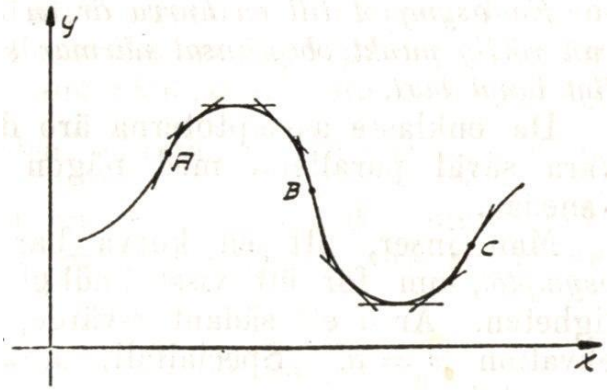
$\because y_{max} = 2$ för $x = 1$ och $y_{min} = -2$ för $x = -1$.

[7] Lösningsförfarande, se kapitel 6 i del I.

# En kurvas konkavitet, konvexitet och inflexion

## 9.1 Inledning

Då vi betecknar en kurva som ***konkav*** eller ***konvex***, får vi komma överens om, att vi avser arten av kurvans krökning i neg. *y*-axelns riktning (nedåt, kurvan sedd underifrån). Så är den i fig. 19 tecknade kurvan konkav inom området *A B* och konvex inom området *B C.* Av derivatans geometriska

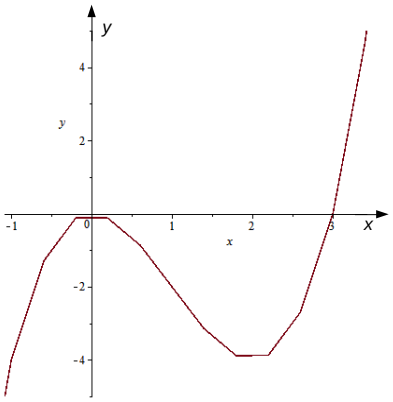



betydelse framgår, att $y'$ ständigt avtar från *A* till *B*, varför $y''$ inom detta område är neg. (utom eventuellt i enstaka punkter, där $y''$ kan vara = 0). På samma sätt finner man, att $y''$ inom detta område är det *B* till *C* är pos. (ev. = 0 i enstaka punkter). I Punkten *B*, där kurvan ändrar arten av krökning, ändrar $y''$ tecken och går då genom värdet 0, om $y''$ är en kontinuerlig funktion.

***Fig. 19.*** *Kurvan är konkav, konvex med inflexionspunkt*

En sådan punkt kallas ***inflexionspunkt*** (vändpunkt) och där skärs kurvan av sin tangent. (Tidigare har vi omnämnt inflexionspunkter med vågrät tangent, punkterna *C* och *E* i fig. 17, sid. 59.)

***Exempel. 48.*** $y = x^3 - 3x^2$



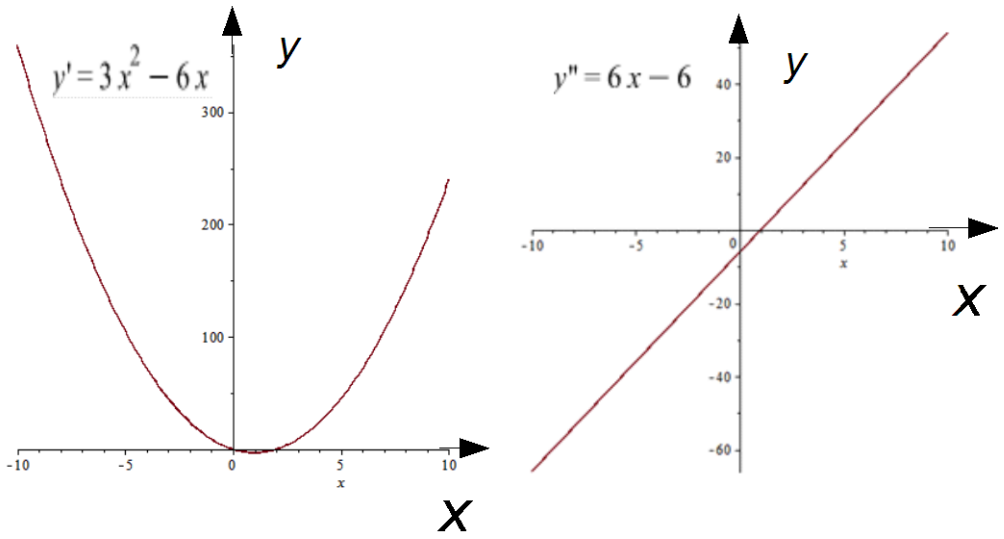

***Graf. 17.*** *Kurvan - exempel 48*

$y' = 3x^2 - 6x$

Efter derivering $\rightarrow y' = 3x^2 - 6x$ och 2:a derivatan $\rightarrow y'' = 6(x-1)$. Kurvan är konkav för $x < 1$ och konvex för $x > 1$. För $x = 1$ har vi Inflexion. $y'' = 6(x-1) = 0$. Teckna kurvorna $y, y'$ och $y''$.

***Exempel. 49.*** $y = \frac{1}{4}(3-x)^4$

Efter derivering $y' = (3-x)^3 \cdot 1$ och 2:a derivatan $\rightarrow y'' = 3(3-x)^2$. Kurvan är konvex på ömse sidor om $x = 3$. För detta *x*-värde blir visserligen $y'' = 0$, men ändrar inte tecken: alltså ingen inflexion. Teckna kurvorna $y, y'$ och $y''$.



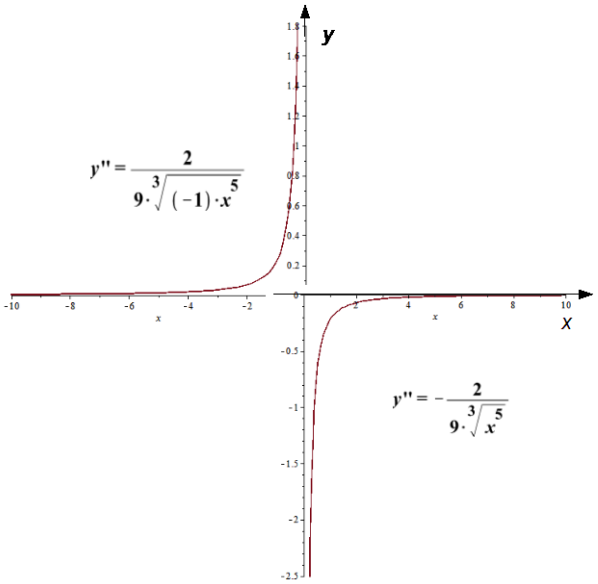

***Graf. 18.*** *y' och y''- exempel 48*

***Exempel. 50.*** $y = \sqrt[3]{x}$

Efter derivering $y = x^{\frac{1}{3}} \rightarrow y' = \frac{1}{3} \cdot x^{\frac{1}{3}-1} \rightarrow y' = \frac{1}{3} \cdot x^{-\frac{2}{3}} \rightarrow y' = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{x^{\frac{2}{3}}}$

2:a derivatan blir: $\rightarrow y'' = \frac{3 \cdot x^{\frac{2}{3}} \cdot 0 - 1 \cdot 3 \cdot \frac{2}{3} \cdot x^{\frac{2}{3}-1}}{\left(3 \cdot x^{\frac{2}{3}}\right)^2} \rightarrow y'' = -\frac{2 \cdot x^{-\frac{1}{3}}}{9 \cdot x^{\frac{4}{3}}} \rightarrow$

$\rightarrow y'' = -\frac{2}{9x^{\frac{4+1}{3}}} \rightarrow y'' = -\frac{2}{9x^{\frac{5}{3}}} \rightarrow y'' = -\frac{2}{9 \cdot \sqrt[3]{x^5}}$ ;




***Graf. 19.*** *y''- exempel 50*

Kurvan är **konkav** för positiva $x$ och **konvex** för negativa $x$.
$y''$ ger här positiva värden, men först får vi se till att rotuttrycket i nämnaren ej blir negativt.

$y'' = -\frac{2}{9\sqrt[3]{x^5}} \rightarrow y'' = \frac{2}{9\sqrt[3]{(-x)^5}}$

Se graf 19.

För $x = 0$ har vi inflexion, då $y''$ där ändrar tecken från $+\infty \rightarrow -\infty$ utan att bli 0.
Andra derivatan är för $x = 0$ diskontinuerlig, i det den slår över från $+\infty \rightarrow -\infty$ .
Kurvan är **konkav** för positiva $x$.

Teckna kurvorna $y$, $y'$ och $y''$.

(Angående ***krökningsradie*** som mått på krökningens storlek, se under kapitel 17 ”beräkning av plana kurvors längd Sid 154.)

# Differentialer och differentiering

Den för funktionen $y = x^2$ på vanligt sätt bildade s.k. differenskvoten $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 2x + \Delta x$ ger, då $\Delta x \to 0$ och även $\Delta y \to 0$ får vi $\to y' = 2x$.

Även för en godtycklig funktion bör gälla:

**(10.1)** $$\frac{\Delta y}{\Delta x} = y' + \varepsilon \qquad (1)$$

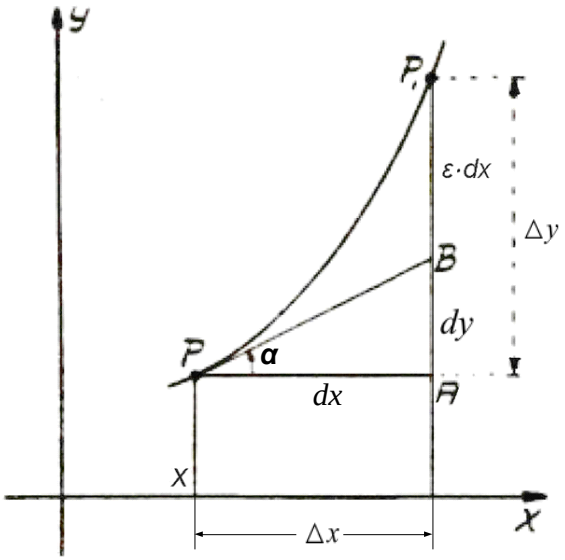
där $\varepsilon$ (epsilon) $\to 0$, när $\Delta x \to 0$ och därmed $\frac{\Delta y}{\Delta x} \to y'$. . Värdet av $\varepsilon$ beror av $\Delta x$ och i allmänhet också av $x$.
Det kan ofta vara praktiskt att skriva även $y'$ såsom en kvot, *differentialkvot*, av två storheter $dy$ och $dx$, vilka kallas *differentialer* av resp. $y$ och $x$. Alltså

**(10.2)** $$\frac{dy}{dx} = y', \text{ varav } dy = y' \cdot dx \qquad (2)$$

Här låter vi $dx$ betyda ett godtyckligt tillskott i $x$, alltså $dx = \Delta x$. Tydligen kommer då $dy$ inte vara motsvarande tillskott $\Delta y$ i $y$, då enligt **(1) och (2)**

**(10.3)** $$\Delta y = y' \cdot dx + \varepsilon \cdot dx \to \Delta y = \frac{dy}{dx} \cdot dx + \varepsilon \cdot dx \to \Delta y = dy + \varepsilon \cdot dx$$

Vad de här ingående storheterna betyder geometriskt, visas i fig. 31.




Att $dy = AB$ följer av, att derivatan geometriskt betyder tan α. Då $\Delta y = AP_1$, är $\varepsilon \cdot dx = BP_1$, vilken sträcka blir allt mindre, både absolut taget och i förhållande till $dy$ $\left( \frac{\varepsilon\, dx}{dy} = \frac{\varepsilon}{y'} \to 0 \right)$, när punkten $P_1$ på kurvan närmar sig $P$.

Härav följer att $\varepsilon \approx dx$ för små $dx$.

***Fig. 31.*** *Tangens α*

***Exempel. 67.*** Bestäm $dy$ och $\Delta y$ för funktionen $y = x^2$, om $x = 1$ och $dx =$ a) 1 b) 0.1 ; c) 0.01; d) 0.001 . . . . .

Vi får $dy = 2x\,dx \to$ a) $2 \cdot 1 \cdot 1 = 2$; b) $2 \cdot 1 \cdot 0.1 = 0.2$; c) $2 \cdot 1 \cdot 0.01 = 0.02$;
d) $2 \cdot 1 \cdot 0.001 = 0.002$; . . . . och $\Delta y = 2x\,dx + (dx)^2 \to$ a) $2 \cdot 1 \cdot 1 + 1^2 = 3$ ;

b) $2\cdot 1\cdot 0.1+0.1^2=0.21$ ; c) $2\cdot 1\cdot 0.01+0.01^2=0.0201$ ; d) $2\cdot 1\cdot 0.001+0.001^2=0.002001$ ;

Rita figur.

Att sätta $\triangle y = dy$, vilket ofta sker i den tillämpade differentialräkningen, innebär en approximation, som gäller bättre, ju mindre $\triangle y - dy$ (och därmed $\triangle y$) är.

***Exempel. 68.*** Beräkna (appr.) det proc. felet i $y = a\cdot\tan(x)$, om $x = 30\,^\circ$ och behäftat med felet $dx = \frac{1}{2}\,^\circ = \frac{\pi}{360}$ rad. För vilket *x*-värde är felet i *y* minst?

Då $\frac{dy}{dx} = \frac{a}{\cos^2(x)}$, blir det procentuella felet:

$$100\cdot\frac{dy}{y} = 100\cdot\frac{2\,dx}{\sin(2x)} \to 100\cdot\frac{2\cdot\frac{\pi}{360}}{\sin(60)} \approx 2.015 \approx 2.0\,\%$$ [1]

Felet är minst för $x = 45\,^\circ$. ($100\cdot\frac{dy}{y} = 100\cdot\frac{2\,dx}{\sin(2x)} \to 100\cdot\frac{2\cdot\frac{\pi}{360}}{\sin(90)} \approx 1.745 \approx 1.7\,\%$).

Att *differentiera* en funktion är att bilda dess differential. Detta erhåller man enligt **(2)** genom att multiplicera funktionens derivata med den oberoende variabelns differential. För t.ex. $y = a$ är

$dy = 0\cdot dx = 0$; för $y = x^n$ är $dy = n\cdot x^{n-1}\cdot dx$.

De regler, som förut ställdes upp för derivering av en **summa**, en **produkt** och en **kvot**, kommer även att gälla för differentiering, om ordet derivata utbytes mot differential. Vi får nämligen:

**(10.4)** ● $d(u+v) = (u'+v')\,dx \to = u'dx + v'dx = du + dv.$

**(10.5)** ● $d(u\,v) = (u\cdot v' + v\cdot u')\,dx \to = u\,v'dx + v\,u'dx = u\cdot dv + v\cdot du.$

**(10.6)** ● $d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\cdot u' - u\cdot v'}{v^2}\cdot dx \to = \frac{v\cdot du - u\cdot dv}{v^2}$

Av kedjeregeln $y' = y'_z\cdot z'$ följer enligt **(2)**

**(10.7)** $dy = y'_z\cdot z'\,dx = y'_z\cdot dz.$

Samma värde på *dy* får vi, om *z* är oberoende variabel (med av *x* och *dx* bestämda *z*- och *dz*-värden).

Detta att man vid differentiering inte behöver skilja på beroende och oberoende variabel (regeln om differentialens permanens), är det just som gör räkning med differentialer så användbar.

***Exempel. 69.*** Bestäm genom differentiering $\frac{dy}{dx}$, om $y = z^2;\ z = 2x^3 - 4.$

[1] Se del I **(20.11)** $\frac{1}{\cos^2(x)} = \frac{2}{1+\cos(2x)}$ och **(20.8c)** $\frac{2}{1+\cos(2x)} = \frac{2}{1+1-2\sin^2(x)}$ $\left[= \frac{1}{1-\sin^2(x)}\right]$

# Integraler

## 11.1 Obestämda integraler

Vi har förut lärt oss att av en given funktion bilda dess derivata eller, vilket ju kommer på ett ut, dess differential. Utgör t.ex. $x^2$ funktionen, bildar derivatan 2 $x$ och differentialen 2 $x\,dx$.

Vi går nu över till den omvända uppgiften: ***att söka en funktion, vars derivata eller differential är given.*** Den sökta funktionen kallar vi ***integralfunktion*** eller kortare ***integral***.

Tydligen är $x^2$ en integral till 2 $x$ (eller $2\,x\,dx$), men även $x^2+5$, $x^2-9.7$, o.s.v.

Om i allmänhet $F(x)$ är en integral till $f(x)$ (eller $f(x)\,dx$), d.v.s. om $\frac{dF(x)}{dx}=f(x)$ (eller $dF(x)=f(x)\,dx$), gäller detta också om alla funktioner av formen $F(x)+C$, där $C$ är en godtycklig konstant, men inte om några andra funktioner[1].

Man säger, att $F(x)+C$ är den ***obestämda*** (indefinita) ***integralen*** till $f(x)$ $(eller f(x)\,dx)$ och anger detta med utskrivsättet: $\int f(x)\,dx=F(x)+C$

(**utläses:** integralen $\int f(x)\,dx$ är $F(x)+C$), vilket alltså innebär detsamma som

**(11.1)** $\frac{dF(x)}{dx}=f(x)$ (eller $dF(x)=f(x)\,dx$).

Tecknet $\int$ kallas **integraltecken** och C **integrationskonstant**.

Då $f(x)\,dx=d(F(x)+C)$ kan man också skriva $\int d(F(x)+C)=F(x)+C$ eller

$d\int f(x)\,dx=f(x)\,dx$ och innebär, att:

Integraltecknet $\int$ och differentialtecknet $d$ upphäver varandra[2]

***Exempel. 73.*** Av $\frac{d(x^2)}{dx}=2x$ (eller $d(x^2)=2x\,dx$) följer $\int 2x\,dx=x^2+C$.

Man inser, att de formler (sammanställda å sid 52 – 53), som vi tidigare härlett för olika funktioners derivator, kan vi skriva i integralform. Vi får då nedanstående integrationsformler, vilkas riktighet kan påvisas genom det s.k. ***integrationsprovet***: derivering (differentiering) av högra ledet.

[1] Det senare påståendet kan man ständigt bevisa, men beviset redovisas inte här.

[2] Jämför det analoga förhållandet vid dignitetsupphöjning och rotutdragning, som i likhet med differentiering och integrering utgör omvända räknesätt: $\sqrt[n]{a^n}=a$ .

## 11.2 Grundintegraler

**(11.2)** $$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$$

**För** $n = -1$ är denna formel inte direkt användbar[3]

**(11.3)** $$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln(x) + C$$

**(11.4)** $$\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln(a)} + C \qquad \text{Specialfall: } \int e^x\,dx = e^x + C$$

**(11.5)** $$\int \cos(x)\,dx = \sin(x) + C$$

**(11.6)** $$\int \sin(x)\,dx = -\cos(x) + C$$

**(11.7)** $$\int \frac{1}{\cos^2(x)}\,dx = \tan(x) + C$$

**(11.8)** $$\int \frac{1}{\sin^2(x)}\,dx = -\cot(x) + C$$

**(11.9)** $$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin(x) + C = -\arccos(x) + c$$

**(11.10)** $$\int_0 \frac{dx}{1+x^2} = \arctan(x) + C = -\operatorname{arccot}(x) + c$$

Andra integraler kan man beräkna genom att överföra dem på grundintegralerna, i det man tillämpar vissa integreringsregler, som utgör omvändningen av deriveringsreglerna[4].

Alla integraler kan man inte utföra på detta sätt[5].

Innan vi övergår till integreringsreglerna, skall vi därför visa, hur man på grafisk väg kan få en approximativ bestämning av en godtycklig integral. Metoden är en omvändning av det på avsnitt 2.2 sid 16 skildrade förfaringssättet vid grafisk derivering.

[3] Högra ledet antar obestämd form.
[4] Avsnitt 2.5 sid. 17 - 25
[5] För dessa beräkningar kan man då tillämpa oändliga serier.

# Integreringsregler

## 12.1 Konstantutflyttning

Att

**(12.1)** $\int a \cdot f(x)\,dx \rightarrow a \cdot \int f(x)\,dx$ - visas genom integrationsprovet.

Regel: ***En konstant faktor får sättas utanför integraltecknet.***

***Exempel. 75.*** $\int 5x^4\,dx \rightarrow 5\int x^4\,dx \rightarrow 5 \cdot \frac{x^5}{5} \rightarrow x^5$ [1]

## 12.2 Sönderdelning

Om *u*, *v* och *w* är funktioner av *x*, gäller:

**(12.2)** $\int (u+v-w)\,dx \rightarrow \int u\,dx + \int v\,dx - \int w\,dx$ - vilket visas genom integrationsprovet.

Regel: ***Integralen av en algebraisk summa = algebraiska summan av termernas integraler.***

***Exempel. 76.*** $\int \left(2x - \frac{2}{x} + 2^x\right) dx \rightarrow \int 2x\,dx - \int \frac{2}{x}\,dx + \int 2^x\,dx \rightarrow x^2 - 2\ln(x) + \frac{2^x}{\ln(2)}$

## 12.3 Transformering (substitution)

Om funktionen under integraltecknet (***integranden***) utgör en funktion av en funktion, kan integralen ofta överföras på någon av grundintegralerna genom ***substitution***. Hur vi gör visar vi genom att beräkna integralen $I = \int (3+2x)^6\,dx$. Sätter vi $(3+2x) = z$ och differentierar likheten får vi $2\,dx = dz$, varvid $dx = \frac{1}{2}dz$. Vi får nu $I = \frac{1}{2}\int z^6\,dz \rightarrow \frac{z^7}{14} \rightarrow \frac{(3+2x)^7}{14}$

Vid relativt enkla integraler föredrar vi emellertid att inte använda substitution, utan vi överför integralen på någon av grundintegralerna genom ***transformering***.

Här visar vi hur detta går till med samma integral som ovan.

$$I = \int (3+2x)^6\,dx \rightarrow \int (3+2x)^6\,d\frac{(3+2x)}{2} \rightarrow \frac{1}{2}(3+2x)^6\,d(3+2x) \rightarrow \frac{(3+2x)^7}{14}$$

[1] I detta och följande exempel på obestämd integration sätter vi inte ut integrationskonstanten, som får underförstås.

***Exempel. 77.*** Beräkna integralen $I=\int \frac{dx}{3x-4}$ ; $I=\frac{1}{3}\int \frac{d(3x-4)}{3x-4} \rightarrow \frac{1}{3}\ln(3x-4)$

***Exempel. 78.*** $I=\int \cos(5x)\,dx$

$\rightarrow I=\int \cos(5x)\,d\frac{5x}{5} \rightarrow \frac{1}{5}\int \cos(5x)\,d(5x) \rightarrow \frac{1}{5}\sin(5x)$

***Exempel. 79.*** $I=\int e^{-3x}\,dx$

$\rightarrow I=\int e^{-3x}\,d\left(\frac{-3x}{-3}\right) \rightarrow -\frac{1}{3}\int e^{-3x}\,d(-3x) \rightarrow -\frac{1}{3}e^{-3x}$

Ovanvisade exemplen tillhör typen:

**I.** **(12.3)** $\int f(a+bx)\,dx \rightarrow \frac{1}{b}\int f(a+bx)\,d(a+bx) \rightarrow \frac{1}{b}\int f(z)\,dz$ [2]

Om $\int f(z)\,dz$ utgör någon av grundintegralerna verkställes alltså integreringen lätt utan att man behöver utföra substitutionen.

**II.** Integraler av formen **(12.4)** $I=\int \frac{dx}{a^2+b^2x^2}$

kan överföras på grundintegralen $\int \frac{dx}{1+x^2}=\arctan(x)$ på fäljande sätt:

$I=\int \frac{dx}{a^2+b^2x^2} \rightarrow I=\frac{1}{a^2}\int \frac{dx}{1+\frac{b^2x^2}{a^2}} \rightarrow$

$\rightarrow I=\frac{1}{a^2}\int \frac{dx}{1+\frac{b^2x^2}{a^2}} \rightarrow \frac{1}{a^2}\int \frac{\frac{a}{b}d\left(\frac{bx}{a}\right)}{1+\left(\frac{bx}{a}\right)^2} \rightarrow \frac{1}{ab}\int \frac{d\left(\frac{bx}{a}\right)}{1+\left(\frac{bx}{a}\right)^2} \rightarrow \frac{1}{ab}\arctan\left(\frac{bx}{a}\right)$

**III.** Integraler av formen **(12.5)** $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-b^2x^2}}$

Behandlas på analogt sätt och blir arcsin-funktioner.

**IV.** Ofta kan man ta ihop $d\,x$ och en del av ***integranden*** samt skriva om detta som en differential av en **resterande funktion** i ***integranden***.

***Exempel. 80.*** $\int \frac{x\,dx}{(x^2+a^2)^2} \rightarrow \frac{1}{2}\int \frac{d(x^2+a^2)}{(x^2+a^2)^2} \rightarrow -\frac{1}{2}(x^2+a^2)^{-1} \rightarrow -\frac{1}{2(x^2+a^2)}$

***Exempel. 81.*** $\int \frac{(\ln(x))^2 dx}{x} \rightarrow \int (\ln(x))^2 d(\ln(x)) \rightarrow \frac{1}{3}(\ln(x))^3$

[2] Där här $z=(a+bx)$ .

# Integrering av rationella funktioner (uppdelning i partialbråk)

Integrationen av en ***hel*** rationell funktion utförs enligt förut givna regler och erbjuder ingen särskild svårighet.

Är det en ***bruten*** rationell funktion[1] under integraltecknet och gradtalet av täljare är högre än eller lika med nämnarens gradtal, ett ”**oegentligt**” bråk, delar vi upp den i **en hel** funktion och en ”**egentligt**” **bruten** funktion, när vi utför den genom bråkstrecket angivna divisionen. Är nu nämnaren av **2:a** eller **högre** grad, kan det ”**egentliga**” bråket uppdelas i partialbråk. Därvid upplöses först nämnaren i faktorer, genom att sätta den = 0 och vi söker rötterna till den så bildade ekvationen.
Beträffande dessa rötter kan olika fall inträffa:

## I. Rötterna *reella* och *olika.*

Vi börjar med ett exempel:

***Exempel. 91.*** Låt integranden vara: $y = \dfrac{2x^4 + 3x^3 - 3x^2 + 3}{x^3 + x^2 - 2x}$

Utför vi divisionen, får vi: **(13.1)** $y = 2x + 1 + \dfrac{2x + 3}{x^3 + x^2 - 2x}$

Vi sätter nu bråkets nämnare = 0 och löser ekvationen. Vi börjar med att bryta ut $x$ och vi får: $x\left(x^2 + x - 2\right)$ som ger $x_1 = 0$. Vi sätter uttrycket innanför parentesen = 0 och löser 2:a grads ekvationen som ger[2] $x^2 + x = 2 \rightarrow x = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 2} \rightarrow x = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1+8}{4}} \rightarrow$

$\rightarrow x = -\frac{1}{2} \pm \frac{3}{2} \rightarrow x_2 = 1 \ldots x_3 = -2$ .

### Obestämda koefficientmetoden

M a o nämnaren kan alltså delas upp i tre 1:a grads faktorer och skrivs $x\,(x+2)\,(x-1)$.
Vi skriver om vänsterledets (VL's) nämnare:

**(13.2)** $\dfrac{2x+3}{x\,(x+2)\,(x-1)} = \dfrac{A}{x} + \dfrac{B}{x+2} + \dfrac{C}{x-1}$

där vi bestämmer $A, B$ och $C$ med ”***handpåläggning***” på följande sätt:[3]
Elimineras nämnarna, får vi: $2x + 3 = A\,(x+2)\,(x-1) + B\,x\,(x-1) + C\,x\,(x+2)$.

$\rightarrow 2x + 3 = A\left(\cdot x^2 - x + 2x - 2\right) + B\cdot\left(x^2 - x\right) + C\cdot\left(x^2 + 2x\right) \rightarrow$

*Skall denna likhet gälla för **alla x-värden**, måste **koefficienterna** **för** **samma dignitet av x** på **ömse sidor om likhetstecknet** vara **lika**.*

---

[1] Täljare och nämnare förutsätter vi inte ha någon gemensam faktor.

[2] Del I, (5.2) $x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 + q}$ .

[3] Vi utesluter nämnaren under respektive bokstav som faktor till den samma, egentligen multiplicerar vi båda leden med VL:s nämnare.

Detta ger:

**(1)** $A + B + C = 0$ ($x^2$ saknas i vänstra ledet och koefficienten är därför 0)

**(2)** $A - B + 2C = 2$ (Koefficienten för $x$ är 2 i vänstra ledet)

**(3)** $-2A = 3$ (Koefficienten för ($x^0$ är 3 i vänstra ledet)

Vi får nu från **(3)** $-2A = 3 \rightarrow A = -\frac{3}{2}$ **(4)**. Sätter vi in $A$ från **(4) i (1)** får vi

$-\frac{3}{2} + B + C = 0 \rightarrow B = \frac{3}{2} - C$ **(5)**. Sätter vi in **(4)** och **(5) i (2)** får vi

$-\frac{3}{2} - \frac{3}{2} + C + 2C = 2 \rightarrow 3C = 5 \rightarrow C = \frac{5}{3}$ **(6).** Sätter vi in **(6) i (5)** får vi

$B = \frac{3}{2} - \frac{5}{3} \rightarrow B = \frac{9-10}{6} = -\frac{1}{6}$

$\because y = 2x + 1 - \frac{3}{2x} - \frac{1}{6(x+2)} + \frac{5}{3(x-1)}$

Det är nu lätt att utföra $\int y = \mathrm{d}x$. De tre sista termerna ger $\ln(x)$ -funktioner, vilket alltid är fallet, när rötterna är reella och olika.

$$\int y = \mathrm{d}x \rightarrow x^2 + x - \frac{3}{2}\ln(x) - \frac{1}{6}\ln(x+2) + \frac{5}{3}\ln(x-1)$$

## II. Rötterna *reella* och helt eller delvis *lika.*

Har ekvationen en *n*-faldig rot $x = a$, innehåller nämnaren faktorn $(x-a)^n$. Vid uppdelning i partialbråk gör vi den ansatsen att låta den nämnda faktorn motsvaras av *n* stycken partialbråk med nämnaren från $(x-a)$ upp till $(x-a)^n$. Ett exempel skall klargöra metoden.

***Exempel. 92.*** Låt integranden vara: $y = \frac{6x^3 - 3x^2 + 2x + 1}{x^4 - 2x^3 + x^2} \rightarrow$

$$\rightarrow y = \frac{6x^3 - 3x^2 + 2x + 1}{x^2(x-1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{(x-1)} + \frac{D}{(x-1)^2}$$

$A, B, C$ och $D$ bestäms som i föregående ex. Vi får nu: $A = 4,\ B = 1,\ C = 2$ och $D = 6.$

Utför vi ny integrationen, får vi $\int y\,\mathrm{d}x = \int\left(\frac{4}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{2}{x-1} + \frac{6}{(x-1)^2}\right)\mathrm{d}x \rightarrow$

$$\rightarrow 4\ln(x) - \frac{1}{x} + 2\ln(x-1) - \frac{6}{x-1}$$

De 2:a och 4:e termerna integreras enligt formeln för $\int x^n\,\mathrm{d}x.$

## III. Rötterna helt eller delvis *imaginära.*

Vid uppdelning av nämnaren i faktorer får vi en eller flera 2:a grads faktorer (om vi inte vill införa imaginära tal). Varje sådan faktor får motsvaras av ett partialbråk med 1:a grads täljare.

# Integrering av några irrationella funktioner

## I. Uttrycket under rotmärket är av 1:a graden

Utgör integranden en funktion av $x$ och $\sqrt[n]{a\,x+b}$, kan den göras rationell genom substitution

**(14.1)** $\sqrt[n]{a\,x+b}=z.$

***Exempel. 94.*** $I=\int\frac{x^2}{\sqrt[3]{x+2}}\,\mathrm{d}x$

Sättes $\sqrt[3]{x+2}=z$, får vi $x=z^3-2$, varav $dx=3\,z^2dz$ och $z^2=\sqrt[3]{(x+2)^2}$.

$$I=\int\frac{x^2}{\sqrt[3]{x+2}}\,\mathrm{d}x\rightarrow\int\frac{(z^3-2)^2}{z}\cdot3\,z^2\mathrm{d}z\rightarrow\int\frac{(z^6-4z^3+4)\cdot3\,z^2}{z}\,\mathrm{d}z\rightarrow3\int(z^7-4z^4+4z)\,\mathrm{d}z\rightarrow$$

$$3\cdot\left(\frac{z^8}{8}-\frac{4z^5}{5}+\frac{4z^2}{2}\right)\rightarrow$$

$$\rightarrow3\left(\frac{5}{8}(x+2)^2\cdot\sqrt[3]{(x+2)^2}-\frac{4}{5}(x+2)\cdot\sqrt[3]{(x+2)^2}+2\sqrt[3]{(x+2)^2}\right)\rightarrow$$

$$\rightarrow\frac{3}{40}\left(5(x+2)^2-32(x+2)+80\right)\cdot\sqrt[3]{(x+2)^2}\rightarrow$$

$$\frac{3}{40}\left(5\,x^2+20\,x+20-32\,x-64+80\right).\sqrt[3]{(x+2)^2}\rightarrow\frac{3}{40}(5x^2-12\,x+36)\cdot\sqrt[3]{(x+2)^2}.$$

## II. Uttrycket under rotmärket är av 2:a graden

Vi behandlar här några i integralräkningens tillämpningar ofta förekommande integraler av detta slag.

***Exempel. 95.*** $$\int\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\,\mathrm{d}x\rightarrow\frac{1}{a}\int\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}}\,\mathrm{d}x\rightarrow\int\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}}\,\mathrm{d}\left(\frac{x}{a}\right)\rightarrow\arcsin\left(\frac{x}{a}\right)$$

***Exempel. 96.*** $\int\frac{1}{\sqrt{x^2\pm a^2}}\,\mathrm{d}x$. Vi gör substitutionen $\sqrt{x^2\pm a^2}+x=z$. Differentieras detta får vi:

$$\frac{x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2\pm a^2}}+\mathrm{d}x=\mathrm{d}z\ \text{ varav }\ \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2\pm a^2}}=\frac{\mathrm{d}z}{z}$$

**(14.2)** $$\because\int\frac{1}{\sqrt{x^2\pm a^2}}\,\mathrm{d}x=\int\frac{1}{z}\,\mathrm{d}z\rightarrow\int\frac{1}{z}\,\mathrm{d}z=\ln(z)\ \rightarrow\ln(z)=\ln\left(x+\sqrt{x^2\pm a^2}\right)$$

***Exempel. 97.*** $\int\sqrt{a^2-x^2}\,\mathrm{d}x$ kan genom delvisintegration (varvid $\sqrt{a^2-x^2}=u,\ x=v$ ) överförs på integralen i exempel 95.

$$\int\sqrt{a^2-x^2}\,\mathrm{d}x = x\sqrt{a^2-x^2} - \int\frac{-x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}\,\mathrm{d}x \rightarrow\ x\sqrt{a^2-x^2} - \int\frac{(a^2-x^2)-a^2}{\sqrt{a^2-x^2}}\,\mathrm{d}x \rightarrow$$

$$\rightarrow x\sqrt{a^2-x^2} - \int\sqrt{a^2-x^2}\,\mathrm{d}x + a^2\int\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\,\mathrm{d}x$$

Härav: $2\int\sqrt{a^2-x^2}\,\mathrm{d}x = x\sqrt{a^2-x^2} + a^2\int\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\,\mathrm{d}x$

Sätter vi in den i exempel 95 beräknade integralen, får vi:

$$\int\sqrt{a^2-x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\left(\frac{x}{a}\right)$$

***Exempel. 98.*** $\int\sqrt{x^2\pm a^2}\,\mathrm{d}x$ behandlas som föregående integral och vi får:

$\int\sqrt{x^2+a^2}\,\mathrm{d}x \rightarrow \frac{x}{2}\sqrt{x^2+a^2} + \frac{a^2}{2}\ln\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right)$ och

**(14.3)** $$\int\sqrt{x^2-a^2}\,\mathrm{d}x \rightarrow \frac{x}{2}\sqrt{x^2-a^2} - \frac{a^2}{2}\ln\left(x+\sqrt{x^2-a^2}\right);$$

De mera allmänna integralformerna **(14.4)** $\int\frac{1}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,\mathrm{d}x$ och $\int\sqrt{ax^2+bx+c}\,\mathrm{d}x$, där även en *x*-term förekommer under rotmärket, kan man reducera till något av de behandlade fallen utan *x*-term genom att, på sätt som visas i föregående ex. skriva $ax^2+bx+c$ under formen av två kvadrater.

***Exempel. 99.*** $$I = \int\frac{1}{\sqrt{3+6x-4x^2}}\,\mathrm{d}x = \int\frac{1}{\sqrt{\frac{21}{4}-\left(4x^2-6x+\frac{9}{4}\right)}}\,\mathrm{d}x \rightarrow$$

$$\rightarrow \int\frac{1}{\sqrt{\left(\sqrt{\frac{21}{2}}\right)^2-\left(2x-\frac{3}{2}\right)^2}}\,\mathrm{d}x \rightarrow \frac{\mathrm{d}\left(2x-\frac{3}{2}\right)}{\sqrt{\left(\sqrt{\frac{21}{2}}\right)^2-\left(2x-\frac{3}{2}\right)^2}}$$

*I* överförd på integralen i exempel 95, varvid $a=\frac{\sqrt{21}}{2}$ och $x$ motsvaras av $2x-\frac{3}{2}$

**(14.5)** $$\because\ I=\int\frac{1}{\sqrt{3+6x-4x^2}}\,\mathrm{d}x \rightarrow \frac{1}{2}\arcsin\left(\frac{4x-3}{\sqrt{21}}\right)$$

# Bestämd integral

## 15.1 Grundbegrepp

Vi låter beteckningen $\int_a^b f(x)\,dx$ visa vad vi får, om vi i den obestämda integralen $\int f(x)\,dx$ efter genomförd integrering i stället för *x* sätter in den ”***övre gränsen***” ***b*** och därifrån subtrahera resultatet vid insättning av den ”***undre gränsen***” ***a***.

Om alltså $\int f(x)\,dx = F(x) + C$, blir $\int_a^b f(x)\,dx = [F(b) + C] - [F(a) + C] = F(b) - F(a)$.

$\int_a^b f(x)\,dx$, som har ett bestämt av *x* oberoende värde, kallas den ***bestämda*** (definita) ***integralen*** från ***a*** till ***b***.

För att markera den omnämnda insättningen och subtraktionen brukar man använda tecknet $\Big|_a^b$ (utläses: substitutionen från *a* till *b*) på sätt som visas i följande exempel.

***Exempel. 100.*** $\int_2^4 f(x)\,dx = \Big|_2^4 \frac{x^2}{2} = \frac{16}{2} - \frac{4}{2} \to 6$.[1]

Låt oss se , vad den bestämnda integralen innebär geometriskt. Den obestämnda integralen $F(x) + C$ representeras grafiskt (se fig. 32, sid 113) av en skara parallellkurvor, en kurva för varje värde på *C*. Skillnaden mellan de mot $x = b$ och $x = a$ svarande ordinator blir för alla kurvorna densamma, nämligen $F(b) - F(a)$, och denna konstanta skillnaden anger alltså den bestämda integralen från *a* till *b*. (Ordinatan *AB* i fig. 32.)

För räkning med bestämda integraler gäller följande två lagar:

**I.** **(15.1)** $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx.$

Lagens riktighet framgår av att **(15.2)** $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$

och **(15.3)** $\int_b^a f(x)\,dx = F(a) - F(b)$

**II.** **(15.4)** $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$

Bevisas analogt med föregående. Båda lagarnas giltighet inses även geometriskt.

[1] (Konstanten *C* bortfaller alltid vid subtraktionen och har därför utelämnats.)

## 15.2 Den bestämda integralen såsom gränsvärde för en summa

Låt $F(x)$ vara en integralfunktion till $f(x)$, vilket ju innebär, att $\frac{dF}{dx} = f(x)$.

Liksom i **(10.1)** sid 103 kan man då skriva:

**(15.5)** $$\frac{\triangle F}{\triangle x} = f(x) + \varepsilon$$

Där $\varepsilon \to 0$ när $\triangle x \to 0$ och därmed $\frac{\triangle F}{\triangle x} \to f(x)$, eller:

**(15.6)** $$f(x) \cdot \triangle x = \triangle F - \varepsilon \cdot \triangle x$$ [2].

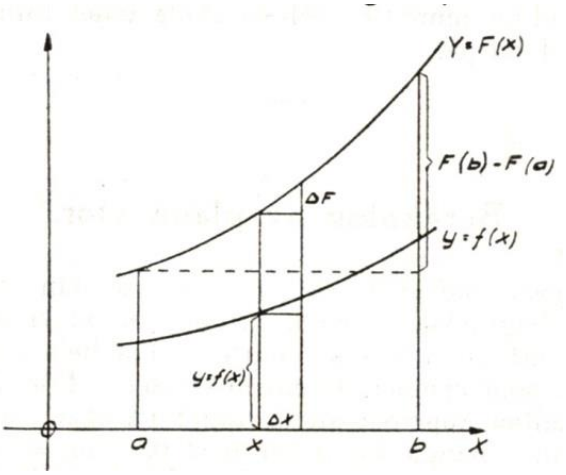



***Fig. 33.*** *Integralen av en summa*

Delar vi hela området mellan *a* och *b* i sådana strimlor som är markerade i fig. 33 och summerar alla dessa strimlor, vilket vi anger med tecknet $\sum_a^b$ (Σ, sigma, en stor grekisk bokstav), får vi: $\sum_a^b f(x) \cdot \triangle x = \sum_a^b \Delta F - \sum_a^b \triangle x.$

Vi får nu

$$\sum_a^b \triangle F = F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)\, dx$$

(se **(15.2)** sid 137) och

$$\sum_a^b \varepsilon \cdot \triangle x < \varepsilon_0 \cdot \sum_a^b \triangle x = \varepsilon_0 (b - a),$$

där $\varepsilon_0$ är det numeriskt största ε-värdet mellan *a* och *b*.

Låter vi nu $\triangle x$ obegränsat gå mot 0, närmar sig också $\varepsilon_0$, därmed även $\varepsilon_0 (b - a)$ och $\sum_a^b \varepsilon \cdot \triangle x$, värdet 0. Vi får då:

**(15.7)** $$\lim_{\triangle x \to 0} \sum_a^b f(x)\, \triangle x = \int_a^b f(x)\, dx$$

Då $\triangle x$ går mot 0, går även $f(x) \cdot \triangle x$ mot 0, om $f(x)$ har ett ändligt värde. Men samtidigt växer antalet termer $f(x) \cdot \triangle x$ över alla gränser.

Vi har här visat, att termernas summa då närmar sig ett bestämt gränsvärde, nämligen en bestämd integral.

På denna viktiga egenskap hos den bestämda integralen att utgöra ett gränsvärde för en summa beror just den vidsträckta användningen, som integralräkningen fått inom olika områden, som vi i det följande skall se talrika exempel på.

[2] Se fig. 33; Beträffande ε även fig. 31 sid 103.

# Beräkning av plana ytor

Vid ***uppmätning*** (i t.ex. $mm^2$) av en plan yta, som helt eller delvis begränsas av en kroklinje, kan vi tänka oss gå till väga så, att vi undersöker, hur många hela kvadrater med 1 mm sida, som rymms inom omkretsen. För att förbättra det så erhållna approximativa värdet på arean kan man ta reda på, hur många kvadrater med 0,1 mm sida ytterligare får rum inom konturen o.s.v. I anslutning till denna metod kommer vi överens om att vi med arean *A*, som inneslutes mellan en kurva $y = f(x)$ samt linjerna $x = a$, $x = b$ och *x*-axeln (se fig. 33, sid 142), förstå det gränsvärde, vartill summan av de ”***inskrivna***” rektanglarna $y \cdot \triangle x$ går mot 0. Såsom vi nyss visats, utgör detta gränsvärde av $\int_a^b y\,dx$

**(16.1)** $\because \quad A = \int_a^b y\,dx$

Vi kan skriva: **(16.2)** $A = \int_a^b dA$, där $dA = y\,dx$.

***Exempel. 101.*** Vi får: $A = \int_1^2 y\,dx = \int_1^2 2x\,dx = \Big|_1^2 \; x^2 = 4 - 1 = 3$

Denna area hade vi kunnat erhålla utan integrationsberäkningens hjälp, då den utgörs av ett parallelltrapets och vi i planimetrin lärt oss beräkna dess area. Visa att båda beräkningsmetoderna ger samma resultat.

Om den sökta arean delvis begränsas av *y*-axeln, kan det ofta vara lämpligt att dela upp den i smårektanglar parallella med *x*-axeln, och vi får arean $\int_a^b x\,dy$, integrera med avseende på *y* (*a* och *b* är gränserna för *y*).

***Exempel. 102.*** Beräkna arean mellan kurvan $y^2 - 2y + x = 0$ och *y*-axeln.

Kurvan skär *y*-axeln för $y = 0$ och $y = 2$ samt att dessa värden blir gränser för *y*.

$$\because A = \int_0^2 x\,dy = \int_0^2 (2y - y^2)\,dy = \Big|_0^2 \left(y^2 - \frac{y^3}{3}\right) = \left(4 - \frac{8}{3}\right) - (0 - 0) = 1\frac{1}{3}.$$

Teckna kurvan.

I fig. 33 löper kurva $y = f(x)$ helt ovanför *x*-axeln. Skulle kurvan ligga helt under *x*-axeln mellan $x = a$ och $x = b$, blir varje term i $\sum_a^b y \cdot \triangle x$ negativ. Vi får nu hela summan och alltså $\int_a^b y\,dx$ negativ. Arean kan då betecknas som negativ. Det positiva mätetalet får arean får vi genom att ändra tecknet för integralen eller genom att kasta om gränserna, vilket enligt sats I sid 137, medför en teckenändring. (Integrering från *b* till *a* innebär, att $\triangle x$ blir neg. och $y \cdot \triangle x$ pos.)

Om kurvan skär *x*-axeln mellan *a* och *b* t.ex. för x-värdet c, får man vid direkt integrering från a till b den algebraiska summan av areorna över och under (sats II, sid 137), varvid arean under *x*-axeln uppträder med neg. tecken. Vill man ha summan av areornas pos. talvärden, måste varje area beräknas för sig.

Den area, som innesluts mellan två kurvor $y_1$ och $y_2$ samt räta linjerna $x = a$ och $x = b$ ( $y_1$ antar vi är större än $y_2$ mellan gränserna), får vi skillnaden mellan de areor som ligger mellan varje kurva och *x*-axeln.

**(16.3)** $$\because A = \int_a^b y_1 \, dx - \int_a^b y_2 \, dx \rightarrow A = \int_a^b (y_1 - y_2) dx$$

Man inser, att formeln är riktig även om kurvorna ligger helt eller delvis under *x*-axeln mellan gränserna. Begränsas den sökta arean endast av de båda kurvorna, får vi gränserna genom att söka kurvornas skärningspunkter.

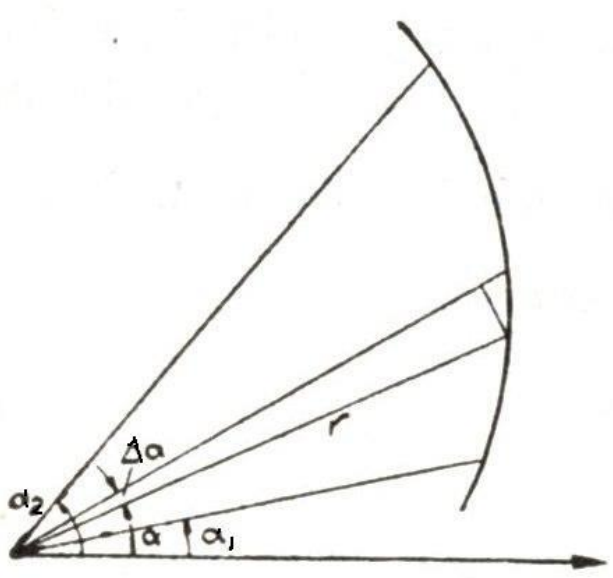



*Fig. 34. Arean inom en sluten kurva*

På liknande sätt kan man beräkna arean inom en sluten kurva (t.ex. en ellips). Integrationsgränserna får vi genom att man bestämmer, var kurvan har vertikala tangenter.

Den area, som inneslutes mellan en kurva $r = f(\alpha)$ i ***polära koordinater*** samt $\alpha = \alpha_1$ och $\alpha = \alpha_2$ (se fig. 34), definierar vi som det gränsvärde, till vilket en summa cirkelsektorer med öppningsvinkeln $\triangle \alpha$ Och radien *r* närmar sig, när $\triangle \alpha$ går mot 0 och därmed sektorernas antal mot oändligheten.

Arean av en sådan sektor är $\frac{1}{2} r^2 \triangle \alpha$.

**(16.4)** $$\because A = \lim_{\alpha \to 0} \sum_{\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{1}{2} r^2 \triangle \alpha \rightarrow \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{1}{2} r^2 \, d\alpha$$

***Exempel. 103.*** Beräkna arean, som begränsas av en ögla av kurvan $r = \cos(3\alpha)$
Då kurvan är symetrisk kring axeln, ställer vi lämpligen upp ett uttryck för halva den sökta arean, varvid gränserna blir $\alpha = 0$ och $\alpha = \frac{\pi}{6}$.

# Beräkning av plana kurvors längd

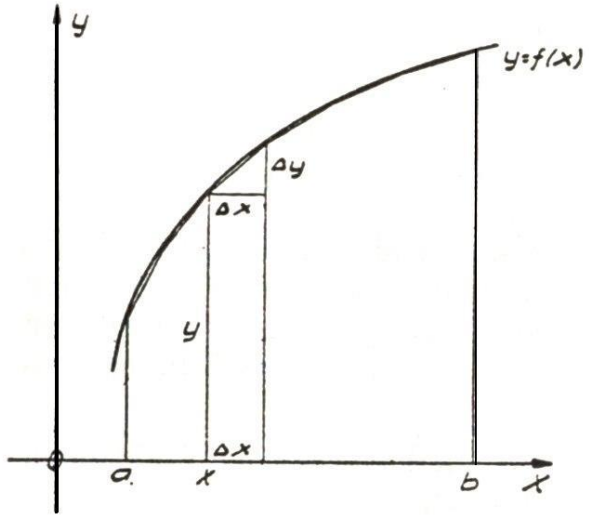



***Fig. 36.*** *Kroklinjens längd*

I anslutning till det sätt, på vilket man skulle tänka sig gå till väga för att ***mäta*** längden av en kroklinje, definierar vi en kurvas längd som det gränsvärde mot vilket längden av en av små kordor bestående bruten linje (se fig. 36) strävar, när varje korda går mot 0.

Längden av en korda blir enligt Pytagoras sats

$$\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} \to \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2} \cdot \Delta x$$

För kurvans längd $s$ mellan $a$ och $b$ gäller då:

**(17.1)**
$$s = \lim_{\Delta x \to 0} \sum_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2} \cdot \Delta x = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx\,;$$

Vi kan alltså skriva:

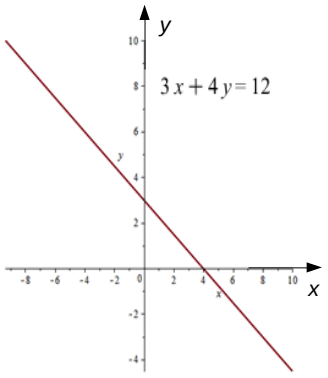
$$s = \int_a^b ds, \quad \text{där} \quad ds = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx \to ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}\,;$$

Man kan vid integration även välja $y$ som oberoende variabel, och vi får då:

$$ds = \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2} \cdot dy$$ ($a$ och $b$ är då gränser för $y$).

***Exempel. 106.*** Beräkna längden av kurvan $3x + 4y = 12$ mellan dess skärningspunkter med koordinataxlarna.

Gränserna för $x$ blir $0$ och $4$. Löser vi ekvationen med avseende på $y$, får vi:




***Graf 34.*** *Linjär linje*

$$y = -\frac{3}{4}x + 3, \quad \text{varav} \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{3}{4}.$$

$$\because ds = \sqrt{1 + \frac{9}{16}}\, dx = \frac{5}{4}\, dx\,; \; s = \int_0^4 \frac{5}{4}\, dx \to$$

$$\to s = \frac{5}{4}\int_0^4 dx \to s = \frac{5}{4}(4 - 0) \to s = \frac{5 \cdot 4}{4} = 5$$

I detta fall hade vi inte behövt använda oss av integrering, då kurvan är en rät linje, vars längd mellan uppgivna punkter kan

erhållas ur Pytagoras sats, som också ger resultatet 5.

Är ekvationen för den kurva, vars längd skall beräknas, given i ***polära koordinater*** $r$ och $\alpha$, inför vi dessa koordinater i uttrycket för $ds$ i stället för de rätvinkliga koordinaterna $x$ och $y$.
Av ekvationerna $x = r\cos(\alpha)$ och $y = r\sin(\alpha)$ [1] får vi genom dess differentiering:
$dx = -r\sin(\alpha)\,d\alpha + \cos(\alpha)\,dr$ och $dy = r\cos(\alpha)\,d\alpha + \sin(\alpha)\,dr$.

Efter insättning av detta i uttrycket för ***ds*** får vi:

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{r^2\,d\alpha^2 + dr^2} \rightarrow ds = \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\alpha}\right)^2}\,d\alpha.$$

Kurvans längd är $s = \int_{\alpha=\alpha_1}^{\alpha=\alpha_2} ds$

***Exempel. 107.*** Beräkna längden av kurvan $r = a\sin(\alpha)$.

Vi får: $\frac{dr}{d\alpha} = a\cos(\alpha)$ och $ds = \sqrt{a^2\sin^2(\alpha) + a^2\cos^2(\alpha)}\,d\alpha \rightarrow ds = a\,d\alpha.$

Gränserna för $\alpha$ är 0 och $\pi$, alltså $s = \int_0^{\pi} a\,d\alpha \rightarrow s = \pi a$

Då kurvan är en cirkel med diametern ***a***, stämmer vårt resultat med den kända formeln för en cirkels omkrets.

På sid. 75 lärde vi oss att med 2:a derivatans hjälp bestämma arten av en kurvas krökning, d.v.s. om kurvan är konkav eller konvex. I samband med längdberäkningen skall vi nu se, hur man får krökningens storlek. – Går vi från en punkt ***P*** (se fig. 37) stycket $\triangle s$ utefter kurvan, ändrar sig

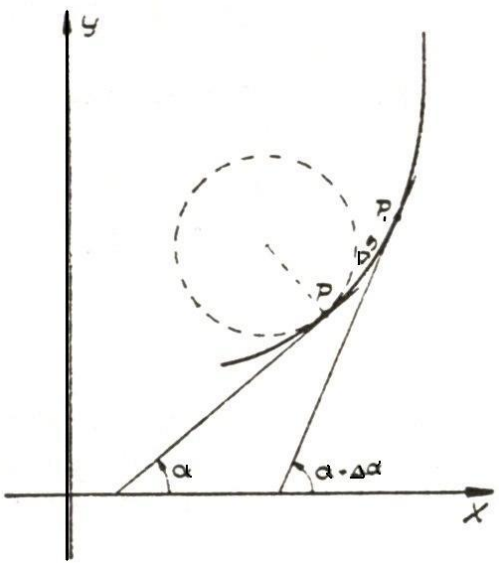



***Fig. 37.*** *Stigningsvinkeln* $\triangle\alpha$

då kurvans stigningsvinkel med $\triangle\alpha$.
Som mått på ***krökningen*** ***k*** i punkten ***P*** väljer vi gränsvärdet av $\frac{\triangle\alpha}{\triangle s}$, när $\triangle s$ går mot 0.

**(17.2)** $\quad \because\ k = \frac{\triangle\alpha}{\triangle s}.$

Då $\tan(\alpha) = y'$, som vi kan skriva $\alpha = \arctan(y')$, blir $d\alpha = \frac{y''}{1 + y'^2}\,dx.$

Då dessutom $ds = \sqrt{1 + y'^2}\,dx,$ får vi:

$$k = \frac{y''}{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}$$

[1] Se ex. 66, sid. 87.

# Volymberäkning

Vi utgår från att volymen av en ***rät pelare***[1] erhålls enligt formeln:

**(18.1)** $V = B \cdot h$

där ***h*** är pelarens höjd i viss längdenhet och ***B*** dess basarea i motsvarande areaenhet. Volymen ***V*** får vi då i motsvarande volymenhet.

Vill vi få ett bevis för denna formel, kan vi resonera som följer:

Låt först höjden ***h*** vara **1** längdenhet, t.ex. mm.
Vi antar, att det inom basareans omkrets rymmes ett visst antal hela kvadrater med sidan **1** mm (arean i mm$^2$). Inom pelaren ryms då lika många hela kuber med kanten **1** mm (volym **1** mm$^3$). Innanför basareans kontur låter vi ytterligare rymma ett visst antal hela kvadrater med sidan **0,1** mm (arean **0,01** mm$^2$), varvid tydligen pelaren innehåller ytterligare lika många **0,01** mm$^3$ o.s.v.

Då det gränsvärde, till vilket summan av kvadraternas areor alltmer närmar sig, är ***B*** mm$^2$, måste pelarens volym vara ***B*** mm$^3$.

Låt nu pelarens höjd vara ***h*** mm.

Vi inser till en början, att om man delar en rät pelares höjd i ***n*** stycken lika stora delar och genom delningspunkterna lägger med basen parallella plan, så blir därigenom pelaren delad i ***n*** kongruenta delar. Utefter pelarens höjd avsätter vi nu så många hela mm som möjligt. Återstår något av höjden, avsätter vi efter detta återstoden så många **0,1** mm som får rum o.s.v. Genom delningspunkterna lägger vi med basen parallella plan. Är nu basarean ***B*** mm$^2$, innehåller pelaren så många mindre pelare av storleken ***B*** mm$^3$ som höjden innehåller i hela mm; därtill lika många pelare med volymen **0,1** ***B*** mm$^3$, som höjden ytterligare innehåller hela 0,1 mm o.s.v. Den räta pelarens volym blir alltså $h \cdot B$ mm$^3$.

---

Vi skall nu visa, hur man kan ställa upp en integral, som gäller för volymen av en ***godtycklig kropp***. Antag att vi vill beräkna volymen ***V*** hos den del av en kropp, som instängd mellan två parallella plan på avståndet ***a*** och ***b*** från ett godtyckligt grundplan ***GP***.

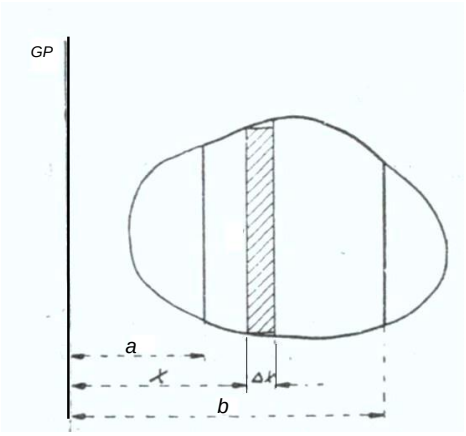



***Fig. 38.*** *Godtycklig kropp*

Fig. 38 föreställer ett snitt genom kroppen, lagt vinkelrätt mot de nämnda planen. Med hjälp av plan parallella med ***GP*** delar vi upp kroppen i ett stort antal skivor och ersätter varje skiva med en liten rät pelare, som till bas har skivans ena begränsningsplan och till höjd avståndet mellan de båda begränsningsplanen. En sådan pelare med basen ***B*** på avståndet ***x*** från ***GP***, höjden $\triangle x$ och alltså volymen $B \cdot \Delta x$ är markerad i fig. Summan av alla dessa raka pelare är ett approximativt värde på den sökta volymen. Med det exakta värdet förstå vi det gränsvärde, mot vilket denna summa strävar, när alla $\triangle x$ går mot 0.

[1] En prisma eller en (inte nödvändigt cirkulär) cylinder med mot basytan vinkelräta sidokanter (generatris).

**(18.2)** $\because V = \lim_{x \to 0} \sum_{a}^{b} B \cdot \Delta x = \int_{a}^{b} B \, dx$

Vi kan skriva:

**(18.3)** $V = \int_{a}^{b} dV, \quad \text{där} \quad dV = B \cdot dx$

I det följande skall vi tillämpa denna formel på sådana fall, där ***B*** antingen är konstant eller med lätthet kan uttryckas som funktion av *x*.

---

En ***sned pelare***[2] har tydligen ***B*** konstant och lika med basarean ***B***. Kallar vi höjden ***h*** och för enkelhetens skull lägga grundplanet ***GP*** i basarean, får vi:

**(18.4)** $V = \int_{0}^{h} B \, dx = B \int_{0}^{h} dx = B \cdot h$

Volymen får vi alltså enligt samma formel, som för den räta pelaren.

---

För att bestämma volymen av en ***pyramid*** med basen ***B*** och höjden h (fig. 39) söker vi uttrycka den med basarean parallella snittarean ***Y*** som funktion av dess avstånd ***x*** från spetsen.

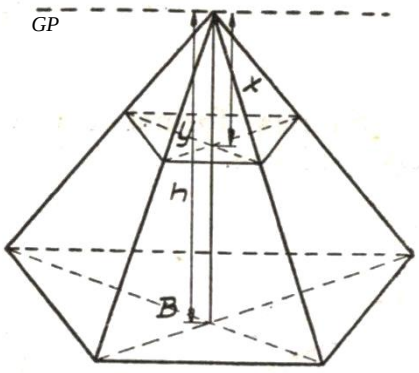



***Fig. 39.*** *Pyramid*

(Grundplanet ***GP*** är alltså i detta fall lagt genom pyramidens spets parallellt med dess basarea). Lägger vi plan genom pyramidens höjd och sidokanter, av ***Y*** och ***B*** deltrianglar, som lätt visas vara parvis likformiga, då motsvarande sidor alla har samma förhållande, nämligen ***x*** till ***h***. Då likformiga trianglar förhåller sig som kvadraterna på likbelägna sidor, blir förhållandet mellan motsvarande deltrianglar i ***Y*** och ***B*** och därmed förhållandet mellan hela areorna ***Y*** och ***B*** som $x^2$ till $h^2$.

$\because \frac{Y}{B} = \frac{x^2}{h^2}$, varav **(18.5)** $Y = \frac{B x^2}{h^2}$ och **(18.6)** $V = \int_{0}^{h} Y \, dx = \int_{0}^{h} \frac{B x^2}{h^2} \, dx = \frac{B \cdot h}{3}$

Samma formel måste gälla för en ***kon*** (rät eller sned, cirkulär eller icke cirkulär), då dess volym utgör gränsvärdet av volymen hos en i konen inskriven pyramid, vars sidoantal växer över alla gränser.

På analogt sätt härleder vi volymen av en (parallellt) ***stympad pyramid*** (höjden ***h*** och basarean) $B_1$, $B_2$
på avståndet $h_1$, $h_2$ från spetsen av den fullbordade pyramiden).

[2] Sned prisma eller sned cylinder.

# Beräkning av buktiga ytors area

Cylinderns och konens buktiga ytor har den egenskapen att de kan bredas ut i ett plan.

Vid utbredning av mantelytan till en ***rät cirkulär cylinder***[1] får vi en rektangel med samma höjd ***h*** som cylindern och med basen = basytans omkrets = $2\,\pi\,r$. Alltså blir arean

**(19.1)** $A = 2\,\pi\,r\,h$

Breder man ut mantelytan till en ***rät cirkulär kon*** med sidan ***s*** och bottenradien ***r***, får vi en cirkelsektor med radien ***s*** och bågen $2\,\pi\,r$. Dess area är:

**(19.2)** $A = \left[\dfrac{(\text{basareans omkrets})\cdot(\text{konens sida})}{2}\right] = \dfrac{(2\,\pi\,r)\cdot s}{2} \rightarrow A = \pi\,r\,s$ [2]

Mantelytan till en (parallellt) ***stympad kon*** (rät cirkulär) med sidan ***s*** samt basradierna $r_1$ och $r_2$ blir, utbredd i ett plan, en del av en cirkelring. Enligt planimetrin får vi denna area genom att multiplicera ringens bredd ***s*** med dess medellängd $\dfrac{2\,\pi\,r_1 + 2\,\pi\,r_2}{2}$, varför den sökta mantelarean blir

**(19.3)** $A = \pi\,(r_1 + r_2)\,s$

Storleken av en godtycklig ***rotationsyta*** (även mantelytorna till den räta cirkulära cylindern och konen är rotationsytor) kan vi uttrycka på följande sätt genom en integral.

Rotationsytan alstras genom att kurvan $y = f(x)$ mellan *x*-gränserna *a* och *b* roterar kring *x*-axeln[3]. Vi ersätter kurvan med en bruten linje bestående av små kordor (se fig. 41). Kordan $PP_1$, av längden $\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} = \sqrt{1 + \left(\dfrac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2}\cdot\Delta x$ beskriver vid rotation mantelytan av en stympad kon med basradierna $y$ och $y + \Delta y$, samt rotationsytans area $A$ får vi enligt **(19.3)**. Med den sökta rotationsarean ***A*** förstå vi nu det gränsvärde, till vilket summan av alla kordorna alstrade ytornas areor närmar sig, när varje korda går mot 0.

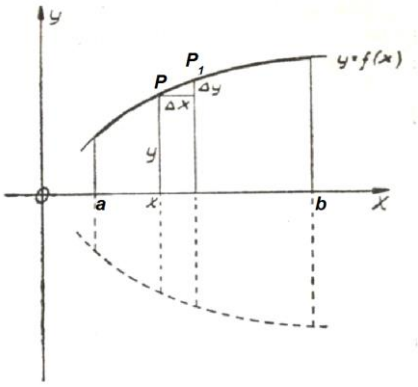



***Fig. 41.*** *Godtycklig rotationsyta*

**(19.4)** $\because A = \lim_{\Delta x \to 0} \sum_a^b \pi\,(2y + \Delta y)\sqrt{1 + \left(\dfrac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2}\cdot\Delta x = \int_a^b 2\,\pi\,y\sqrt{1 + \left(\dfrac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2}\,dx$

Vi kan också skriva: $A = \int_a^b 2\,\pi\,y\,ds$, där $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$, eller $A = \int_a^b dA$, där $dA = 2\,\pi\,y\,ds$

Integrationen kan även utföras med *y* som oberoende variabel, då *a* och *b* är *y*-gränser.
Roterar kurvan kring *y*-axeln, får vi på liknande sätt för rotationsytans area formeln:

---

[1] En sådan avses alltid, när man i dagligt tal använder benämningen cylinder.
[2] Se S. Eriksson, Matematik del I, sid 229 **(18.7)** - **(18.10)**.
[3] Kurvan antas inte skära *x*-axeln mellan *a* och *b*.

**(19.5)** $A = \int_a^b 2\,\pi\,x\,\mathrm{d}s$

Som tillämpning skall vi beräkna arean av ett ***klotbälte*** (sfärisk zon): den mellan två parallella skärande plan belägna delen av en klotyta (Fig. 40).

Ytan, dess area, alstras genom rotation kring *x*-axeln av kurvan (cirkeln) $x^2 + y^2 = r^2$ mellan $x = a$ och $x = b$. Ekvationen ger:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}, \text{ varav } ds = \sqrt{1 + \frac{x^2}{y^2}}\,dx = \frac{r}{y}\,dx$$

**(19.6)** $\because \int_a^b 2\,\pi\,y \cdot \frac{r}{y}\,dx = 2\,\pi\,r\,(b - a)\,.$

Då $(b - a)$ klotbältets höjd *h*, blir

**(19.7)** $A = 2\,\pi\,r\,h$

Man inser, att samma formel även gäller för den buktiga ytans area (kalotten) till ett klotsegment med höjden *h*.

Hela klotarean får vi om av formeln genom att sätta $h = 2\,r$. Vi får nu

**(19.8)** $A = 4\,\pi\,r^2$

---

# Tyngdpunktsberäkning

## 20.1 Kroppar

### 20.1.1 Pyramidens och konens tyngdpunkt

Då vi förutsätter att begreppet tyngdpunkt är bekant från mekaniken, likaså den lag, momentlagen, som tillämpas vid tyngdpunktsberökning, skall vi omedelbart visa ett exempel, där det framgår, att integralräkningen är det naturliga räknesättet vid tyngdpunktsbestämning.

***Exempel. 109.*** Pyramid eller kon

Vi delar upp kroppen (basarean = ***B***, höjden = ***h***) i ett antal med basarean parallella skivor, som vi approximativt ersätter med räta pelare. En sådan pelare med basarean ***Y*** på avståndet ***x*** från kroppens spets och med höjden $\Delta x$ är markerad i fig. 42, som föreställer ett genom spetsen vinkelrät mot basarean lagt snitt av kroppen. Om ***p*** får beteckna massans tyngd av volymenheten hos den homogena kroppen (som består allt igenom av samma ämne), blir $p \cdot Y \Delta x$ pelarens tyngd, som kan tänkas fäst i pelarens tyngdpunkt på avståndet $x + \frac{1}{2} x$ från ett genom kroppens spets parallellt med basarean lagt plan (*GP* i fig. 42). Tillämpar vi nu

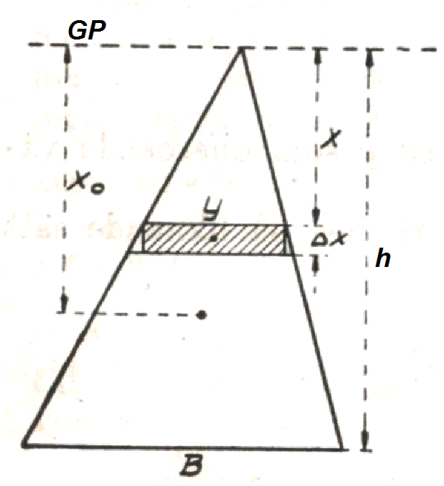



***Fig. 42.*** *Pyramid eller kon*

***Momentlagen***:

> ***Det helas moment*** = ***summan av delarnas moment***,

i det vi tar moment med avseende på grundplanet ***GP***, får vi, om $x_0$ är ***den sökta tyngdpunktens avstånd*** från ***GP***:

$$x_0 \cdot \Sigma p \cdot Y \Delta x = \Sigma \left( x + \frac{1}{2} \Delta x \right) \cdot p \cdot Y \Delta x .$$

Då *p* kan bortdivideras från ekvationens alla termer, inser vi, att man kan räkna med volymen i stället för massas tyngd. Låter vi nu $\Delta x$ gå mot 0, övergår summorna i bestämda integraler (*x*-gränserna 0 och *h*).

**(20.1)** $$\therefore x_0 \int_0^h Y \, dx = \int_0^h x \cdot Y \, dx$$

Då $\frac{B}{h^2} = \frac{h^2}{x^2} \rightarrow Y = \frac{B \cdot x^2}{h^2}$ (se **(18.5)**, sid 160), kan integralerna lätt utföras[1].

Vi ersätter nu vänstra ledet i **(20.1)** med $x_0 \cdot \frac{B h}{3}$ samt högra ledets $Y$ med $\frac{B x^2}{h^2}$ och vi får:

[1] Då kroppens volym är $\frac{B h}{3}$, kan detta sättas in i stället för integralen i vänstra ledet.

$$x_0 \cdot \frac{B\,h}{3} = \int_0^h x \cdot \frac{B\,x^2}{h^2}\,dx \rightarrow x_0 \cdot \frac{B\,h}{3} = \int_0^h \frac{B}{h^2}\,x^3\,dx \rightarrow$$

$$\rightarrow x_0 \cdot \frac{B\,h}{3} = \left[\frac{B}{h^2} \cdot \frac{x^4}{4}\right]_0^h \rightarrow x_0 = \frac{3}{4}\frac{B}{B} \cdot \frac{h^4}{h^3} \rightarrow x_0 = \frac{3}{4}h.$$

Från basarean räknat ligger tyngdpunkten alltså på $\frac{1}{4}h$. [2]

Här liksom vid föreg. tillämpningar av integralräkningen har förfaringssättet varit detta: Man delar upp föreliggande geometriska figur (volym, yta, längd) i smådelar (element) med hjälp av plan på avståndet $\Delta x = dx$ (se sid 103) från varandra.

Varje element utbytes mot ett förenklat sådant (en rät pelare $Y\,dx$, en rektangel $y\,dx$, en rät linje $ds$ o.s.v.). En därefter uppställd summa, innehåller dessa förenklade element, övergår, när $dx \rightarrow 0$, i en bestämd integral (se **(15.7)** sid. 142), som beräknas och ger det sökta: volymen, arean, längden, momentet o.s.v.

I fortsättningen framhåller vi inte särskilt, att ett med en differential betecknat element är ett förenklat sådant; genom efterföljande integrering sker ju gränsövergången automatiskt och vi får det riktiga värdet av elementet.

Ett annat sätt att dela upp i element har vi använt vid polära koordinater (fig. 34, sid. 142); även andra uppdelningar kan ifrågakomma; i cirkelringar (fig. 46, sid. xxx), i cylindriska skal (fig. 47 a, sid xxx) o.s.v.

---

### 20.1.2 Rotationskropp

För den ***rotationskropp***, som alstras vid rotation kring *x*-axeln av den mellan kurvan $y = f(x)$ och *x*-axeln samt mellan *x* = *a* och *x* = *b* inneslutna arean, måste tyngdpunkten av symmetriskäl ligga på *x*-axeln (se fig. 43).

Dess avstånd $x_0$ från origo får vi genom att ställa upp en momentekvation, varvid ett mot *x*-axeln vinkelrätt plan genom origo utses till momentplan. Då ett mot *x*-axeln vinkelrätt volymsegment är $\pi y^2 dx$ (se volymberäkning **(18.8) sid 161**), får vi ekvationen:

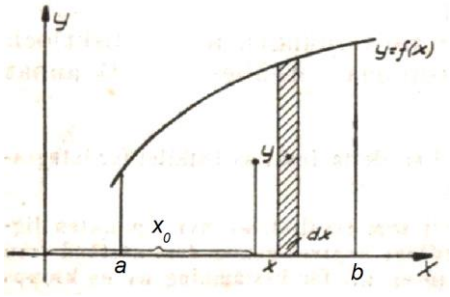



***Fig. 43.*** *Rotationskropp*

**(20.2)** $$x_0 \int_a^b \pi y^2\,dx = \int_a^b x \cdot \pi y^2\,dx$$

Har rotationskroppen alstrats genom rotation kring *y*-axeln, delas kroppen vanligen upp i mot *y*-axeln vinkelräta element.

[2] Beräkningen har endast givit som resultat, att tyngdpunkten ligger i ett visst plan. Då punktens läge anges från tre (mot varandra vinkelräta) plan, inser vi, att för bestämningen av en kropps tyngdpunkt i allmänhet behöver man tre momentekvationer, men antalet kan reduceras, om kroppen har symetriegenskaper.

# Beräkning av tröghetsmoment

För beräkning av en kropps tröghetsmoment ***I*** med avseende på en axel uppdelas kroppen (volym, yta eller längd med den jämnt fördelade massan ***M*** ) i element så, att alla ett moments punkter har (approximativt) samma avstånd ***r*** till axeln. Sedan multipliceras varje elements massa ***dM*** med kvadraten på nämnda avstånd. Man bildar därpå summan av alla så erhållna produkter. Låter man nu storleken av varje element gå mot 0, övergår summan i en ***bestämd*** integral, som utförs och utgör det sökta tröghetsmomentet. Alltså:

**(21.1)** $$I = \int r^2 \, \mathrm{d}M$$

Byter vi ut vid beräkning ett elements massa mot volym, yta respektive längd får vi det s.k. ***geometriska tröghetsmomentet*** till skillnad från ***masströghetsmomentet***[1]. Det senare får vi tydligen av det första genom multiplikation med massan av volyms-, yt-, respektive längdenheten.

***Masströghetsmomentet =***

| | | |
|---|---|---|
| **1.** | **Volym** | ***Geometriskt tröghetsmomentet * volymenheten*** |
| **2.** | **Yta** | ***Geometriskt tröghetsmomentet * ytenheten*** |
| **3.** | **Längd** | ***Geometriskt tröghetsmomentet * längdenheten*** |

Av tröghetsmomentet $I_0$ med avseende på en tyngdpunktsaxel får vi tröghetsmomentet $I_a$ med avseende på en därmed ***parallell*** axel på avståndet ***a*** enligt:

”***Förflyttningssatsen***”[2]

**(21.2)** $$I_a = I_0 + Ma^2$$

varvid massan ***M*** utbytes mot volym, yta respektive längd, om det är frågan om ***geometriskt*** tröghetsmoment.

För en plan yta eller plan linje skiljer man mellan ***polärt*** och ***ekvatoriellt*** tröghetsmoment, alltefter som axeln är ***vinkelrät*** mot eller ***ligger i planet*** ifråga. Härvid gäller satsen (följer av att $r^2 = x^2 + y^2$ ):

**(21.2)** $$I_r = I_x + I_y$$

där $I_r$ är det ***polära*** tröghetsmomentet samt $I_x$ och $I_y$ ***ekvatoriella*** tröghetsmoment med avseende på två mot varandra vinkelräta axlar genom polaraxelns skärningspunkt med planet.

I stället för att utgå från definitionen på tröghetsmoment och alltså dela upp i element så, att ett elements punkter har samma avstånd från axeln, kan det vara förmånligare med en uppdelning i sådana delar, vilkas tröghetsmoment man känner. Det helas tröghetsmoment får vi sedan genom summan (integralen) av delarnas tröghetsmoment.

---

[1] Endast massträghetsmomentet har fysisk betydelse och spelar vid en kropps rotation samma roll som massan vid translation. En ytas geometriska tröghetsmoment används som matematisk hjälpbegrepp i hållfasthetsläran vid böjning och vridning.

[2] Förutsättes känd från mekaniken.

För att belysa detta visar vi några exempel:

***Exempel. 116.*** *Rät linje* (smal stång) av längden ***l*** och massan ***M*** med avseende på en däremot vinkelrät axel genom ena ändpunkten (fig. 44).

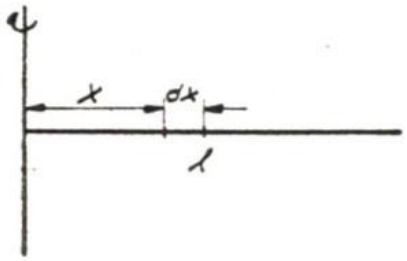



***Fig. 44.*** *Rät linje*

Det geometriska tröghetsmomentet blir:

**(21.3)** $$I_g = \int_0^l x^2\,\mathrm{d}x \rightarrow I_g = \Big[\frac{x^3}{3}\Big]_0^l \rightarrow I_g = \frac{l^3}{3}$$

Genom multiplikation med massan per lägenhet $\frac{M}{l}$ får vi masströghetsmomentet $I_m = \frac{1}{3}Ml^2$ .

***Exempel. 117.*** ***Rektangel*** (tunn rektangulär skiva) av höjden ***h*** och massan ***M*** med avseende på en med basen sammanfallande axel (fig. 45 a).

Vi får: **(21.4)** $$I_g = \int_0^h x^2 \cdot b\,\mathrm{d}x \rightarrow I_g = \frac{b\,h^3}{3}$$

Man kan även dela upp rektangeln i mot axeln vinkelräta element (fig45 b) och utgår från det i föreg. ex. härledda tröghetsmomentet för en rät linje. Linjens massa motsvaras av ytan $h\,dx$, om vi avser det geometriska tröghetsmomentet.

**(21.5)** $$\because I_m = \frac{b\,h^3}{3}\cdot\frac{M}{b\,h} \rightarrow I_m = \frac{1}{3}Mh^2$$

Då massan per ytenhet är $\frac{M}{b\,h}$ , blir masströghetsmomentet

**(21.6)** $$I_m = \frac{1}{3}Mh^2$$

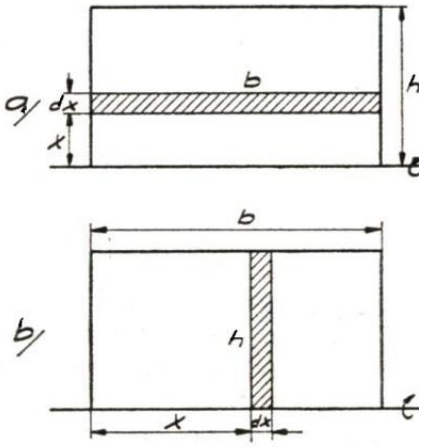



***Fig. 45 a och b.*** *Rektangel*

***Exempel. 118.*** ***Cirkel*** (tunn cirkelformig skiva) med radien ***r*** och massan ***M***.

Vi beräknar först det ***polära*** tröghetsmomentet (axeln genom medelpunkten). Vi delar upp ytan i ringformiga element enligt fig. 46, och får:

**(21.7)** $$I_{g_p} = \int_0^r x^2 \cdot 2\,\pi x\,\mathrm{d}x \rightarrow I_{g_p} = \frac{\pi r^4}{2} = \frac{\pi d^4}{32}$$ , ($d$ = diametern).

Det ***ekvatoriella*** tröghetsmomentet (axeln genom medelpunkten) får vi nu enkelt av satsen $I_r = I_x + I_y$. Då $I_x = I_y$ av symmetriskäl, blir det geometriska tröghetsmomentet:

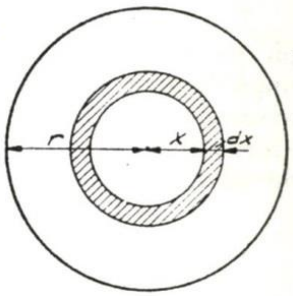



***Fig. 46.*** *Cirkel*

**(21.8)** $$I_{g_e} = \frac{\pi r^4}{4} = \frac{\pi d^4}{64}$$

Då massan per ytenhet är $\frac{M}{\pi r^2}$, blir masströghetsmomentet

# Analytisk behandling av 1:a och 2:a grads kurvor

## 22.1 Inledning[1]

På sid 2 har vi infört koordinatbegreppet och visat, hur man med dess hjälp kan geometriskt representera en ekvation genom en kurva, som utgör sammanfattningen av alla de punkter, vilkas koordinater satisfiera den givna ekvationen. Vi skall nu vända på problemet, i det vi utgår från ett givit geometriskt villkor, som kurvans alla punkter skall uppfylla, och försöker ställa upp ekvationen för kurvan.[2] Genom att algebraiskt (analytiskt) behandla den erhållna ekvationen kan vi få fram andra geometriska egenskaper hos kurvan.[3]

Vi börjar med att härleda ett par formler, som behövs i det följande.

### *Avståndet mellan två punkter*

Koordinaterna för två punkter $P_1\,(x_1,\,y_1)$ och $P_2\,(x_2,\,y_2)$ är givna. Att bestämma avståndet ***d*** mellan punkterna (Fig. 48). Ur Pytagoras sats får vi:

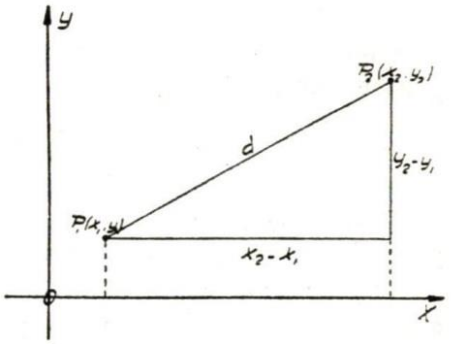



***Fig. 48.*** *Triangel*

**(22.1)** $$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$

Att denna formel gäller oberoende av koordinaternas storlek och tecken, kan man visa genom att förlägga punkterna $P_1$ och $P_2$ på olika sätt.

***Exempel. 120.*** Bestäm avståndet mellan punkterna (-2, 3) och (1, -1).

Enligt **(22.1)** blir $d=\sqrt{(1+2)^2+(-1-3)^2}\;\rightarrow\; d=\sqrt{9+16}\;\rightarrow\; d=5$

### *Delning av avståndet mellan två punkter*

Koordinaterna för två punkter $P_1\,(x_1\,,\,y_1)$ och $P_2\,(x_2\,,\,y_2)$ är givna.

Vi skall bestämma koordinaterna för en punkt $P\,(x\,,y)$, som delar sträckan $P_1\,P_2$ i förhållandet $\frac{m}{n}$ (Fig. 49).

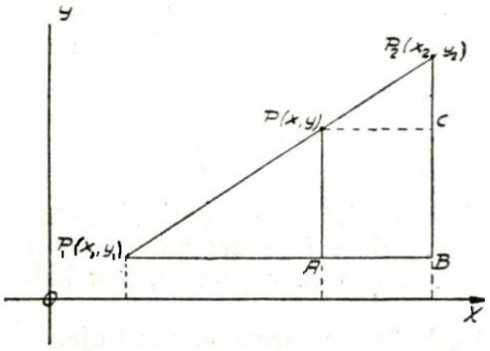



***Fig. 49.*** *Triangel*

Enligt transversalsatsen får vi:

**(1)** $$\frac{P_1A}{AB}=\frac{m}{n}.$$

Sätter vi in $P_1A=x-x_1$ och $AB=x_2-x$ i **(1)** och löser ekv. med avseende på x, får vi

$$\frac{x-x_1}{x_2-x}=\frac{m}{n}\rightarrow m\,(x_2-x)=\mathrm{n}(x-x_1)\;\rightarrow\; m\,x_2-m\,x=n\,x-n\,x_1\;\rightarrow$$

$$\rightarrow\; m\,x_2+n\,x_1=x\,(m+n)\;\rightarrow\;\textbf{(22.2)}\qquad x=\frac{m\,x_2+n\,x_1}{m+n}\;.$$

---

[1] Repetera gärna S. Eriksson Matematik del I, kap. 22 -23.

[2] Kurvan utgör den ***geometriska orten*** för de punkter, vilka uppfyller det givna geometriska villkoret.

[3] Denna gren av matematiken kallas ***analytisk geometri***.

Då $\frac{BC}{CP_2} = \frac{m}{n}$ , får vi analogt **(22.2b)** $y = \frac{my_2 + ny_1}{m+n}$ .

Som specialfall $(m = n)$ får vi koordinaterna för mittpunkten av $P_1$ $P_2$ :

**(22.2')** $x = \frac{x_1 + x_2}{2}$ , $y = \frac{y_1 + y_2}{2}$ . Formlerna **(22.2), (22.2b)** och **(22.2'),** är allmängiltiga, d.v.s. gäller för godtyckliga värden på $P_1$ – och $P_2$ : s koordinater.

***Exempel. 121.*** Bestäm koordinaterna för tyngdpunkten i den triangel, som har sina hörn i punkterna $(-3, 1)$ , $(1, -7)$ och $(5, 3)$.

Koordinaterna för mittpunkten av den sida, som förenar de båda första punkterna blir enligt **(22.2')** (- 1, -3). Förenas denna mittpunkt med motstående hörn (5, 3) i triangeln, delas denna linje (medianen) av tyngdpunkten i förhållande 1:2 (från triangelsidans mittpunkt räknat). Enligt **(22.2)** och **(22.2b)** blir tyngdpunktens koordinater (1, -1). I bild 24 visar vi även medianen till hörnet (1, -7) som går igenom tyngdpunkten. Rita in den tredje bisektrisen!

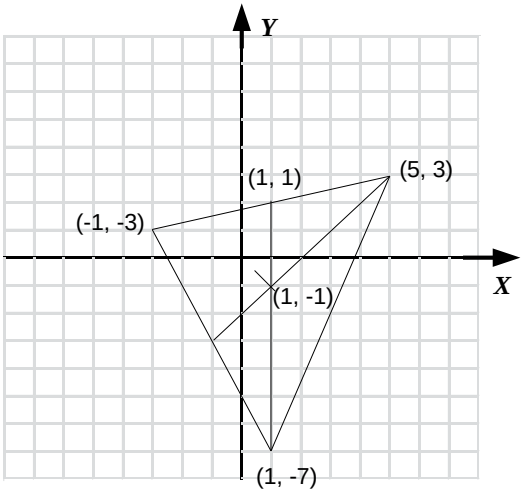



***Bild. 24.*** *Triangel*

## 22.2 Den räta linjen

Vi har på sid. 8 **(1.9)** visat, att den allmänna 1:a grads ekvationen

**(22.3)** $Ax + By + C = 0$

som geometriskt representeras av en rät linje. Om *y*-termen inte saknas, kan ekvationen lösas med avseende på *y*, då man får

**(22.4)** $y = kx + l \left( k = -\frac{A}{B} , l = -\frac{C}{B} \right)$

Då $y' = k$, anger koefficienten ***k*** för $x$ linjens stigning $[\tan(\alpha)]$ . Vi kallar *k* för ***vinkelkoefficient***. Då ***l*** är det värde, *y* antar för $x$ = 0, bestämmer *l* var linjen skär *y*-axeln, och kallas linjens ***ordinata i origo***.

För värdepar *k, l* får vi en bestämd rät linje. Är *k* = 0 antar ekvation **(22.4)** formen ***y = l,*** som betyder en med *x*-axeln parallell rät linje**.** För ***l*** = 0 får samma ekvation formen $y = kx$ : en rät linje genom origo. Är *k* 0 och *l* = 0, får vi *y* = 0, som representeras av *x*-axeln.
Saknas *y*-termen i ekv. **(22.3)**, kan den skrivas under formen

**(22.5)** $x = a \quad \left( a = -\frac{C}{A} \right).$

vars grafiska bild blir en med *y*-axeln parallell rät linje. För *a* = 0 blir speciellt $x$ = 0**:** ***y*-**axeln.

# Serier

## 23.1 Inledning

Definition:

***En serie är en följd av tal, vilka bildas efter en bestämd lag. Talen kallas seriens termer.***

Utdrag: ”[1]

Om följden av delsummor $\{s_n\}_1^\infty$ konvergerar mot ett värde ***s***, sägs ”den oändliga serien” $\sum_1^\infty a_n$ vara konvergent och ha summan ***s***.

Som en första observation kan vi notera, att om en serie $\sum_1^\infty a_n$ är konvergent, så måste nödvändigtvis $a_n \to 0$, då $n \to \infty$. Ty $a_n = s_n - s_{n-1} \to s - s = 0$, då $n \to \infty$.

Ett nödvändigt villkor för konvergens av en serie $\sum_1^\infty a_n$ är att $a_n \to 0$, då $n \to \infty$.

En annan omedelbar följd av konvergensdefinitionen är, att om $\sum_1^\infty a_n$ är konvergent och har summan s, så är också $\sum_1^\infty K\,a_n$ konvergent (*K* konstant) och har summan $K\,s$. ”

## 23.2 Aritmetisk serie

**I.** En ***aritmetisk serie*** är skillnaden mellan varje term och närmast följande konstant.

Kallar vi den ***första termen a*** och den ***konstanta skillnaden*** (***differensen***) ***d***, blir serien

**(23.1)** $a, a + d, a + 2\,d, a + 3\,d, \ldots$

Om sen **n:te termen** i ordningen betecknas med ***u***, är

**(23.2)** $u = a + (n - 1)\,d.$

Varje term i serien är tydligen aritmetiska mediet mellan närmast föregående och närmast efterföljande term. För positivt ***d*** är serien ***stigande*** och för negativt ***d fallande***.
***Summan s*** av de ***n*** första termerna kan skrivas

**(23.3)** $s = a + (a + d) + \ldots. + (u - d) + u$

[1] Kjellberg, B, ”Högre ingenjörskurs i matematik” brev 11, Hermods, Malmö, 1961.

eller, med termerna i omvänd ordning,

**(23.4)** $s = u + (u - d) + \ldots . + (a + d) + a.$

Adderat man de båda likheterna, får vi

**(23.5)** $2\,s = (a + u) + (a + u) + \ldots . (a + u) + (a + u).$

Då antalet av de lika parenteserna är ***n***, blir

**(23.6)** $s = n \cdot \frac{a + u}{2}.$

Summan är alltså antalet termer gånger aritmetiska mediet mellan den första och sista termen.

***Exempel. 158.*** En tjänstemans lön ökas årligen med 1 000 kr och utgör under det 15:e året 40 000 kr. Hur stor blir lönen under det 35:e året?

Om begynnelselönen är *a* kr, är lönen under det 15:e året $a + 14 \cdot 1\,000 = 40\,000,$ varav $a = 26\,000.$ Under det 35:e året blir lönen $a + 34 \cdot 1\,000 = 60\,000$ kr.

***Exempel. 159.*** I ett s.k. amerikanskt lotteri med 100 st. lotter kostar den första lotten 1 kr, den andra 2 kr, den tredje 3 kr o.s.v. Hur mycket kostar samtliga lotter?

Enligt **(23.5)** får vi summan *s*:

$$s = 100\,\frac{1 + 100}{2} \rightarrow s = 5\,050 \text{ kr}.$$

# Sammansatt ränta

Då ett kapital förräntas efter ***sammansatt ränta*** (eller ***ränta på ränta***) vid slutet av varje räntetermin (vanligen ett helt eller halvt år), läggs räntan till kapitalet (***räntan kapitaliseras***) så att under nästa räntetermin beräknas räntan på det så ökade kapitalet.[1]

## 24.1 Några samband

När vi utför ränteberäkningar kan vi använda följande beteckningar på de begrepp som vi hanterar:

$s$ = kapitalet
$r$ = räntesats i %
$n$ = antalet perioder
$PMT$ = periodens inbetalning [*annuiteten = ränta + amortering*] (payment)
$PV$ = nuvärde (present value)
$FV$ = kommande värde (future value)
$(1+r)$ = förändringsfaktorn

**(24.1)** $$PV = \frac{1-(1+r)^{-n}}{r} \cdot PMT$$

Eller med ord: *nuvärdet (PV) är lika med bråket 1 minus förändringsfaktorn (1+r) upphöjt det negativa värdet av antalet perioder (-n) i täljaren och räntesatsen r i nämnaren samt bråket multiplicerat med inbetalt annuitetsbelopp (PMT) i slutet av varje period.*

**(24.2)** $$PMT = \frac{r}{1-(1+r)^{-n}} \cdot PV$$

Eller med ord: *annuiteten (PMT) är lika med bråket räntesatsen (r) i täljaren och 1 minus förändringsfaktorn (1+r) upphöjt med det negativa värdet av antalet perioder (-n) i nämnaren samt bråket multiplicerat med nuvärdet (PV) (normalt det lånade beloppet).*

**(24.3)** $$FV = PMT \cdot \frac{(1+r)^{n}-1}{r}$$

Eller med ord: *slutvärdet (FV) är lika med ett konstant belopp (PMT), som betalas i slutet av varje period multiplicerat med bråket förändringsfaktorn upphöjt i antalet perioder* $(1+r)^{n}$ *minus 1 i täljaren samt räntesatsen i nämnaren.*

## 24.2 Exempel

***Exempel. 176.*** En summa av t.ex. 1 000 kr, som förräntas efter 4 % ränta på ränta, har efter 1 år stigit till $1\,000 \cdot 1.04$, efter 2 år till $1\,000 \cdot 1.04^2$ och efter 10 år till $1000 \cdot 1.04^{10} = 1\,480.24$ kr.

Om i allmänhet ett kapital ***k*** kr under ***n*** år efter ***r*** % ränta på ränta växer till ***s*** kr, är tydligen

**(24.4)** $$s = k\left(1+\frac{r}{100}\right)^{n}$$ (***n*** ett helt tal).

[1] I det följande, där inte annat sägs, antas räntan kapitaliserad vid varje års slut.

Enligt formeln blir ***k*** kr av kapitalet ***s*** kr som kan betalas ut om ***n*** år

**(24.5)** $$k = \frac{s}{\left(1 + \frac{r}{100}\right)^n}$$

Har man i en uppgift att göra med flera kapital, måste dessa för att kunna jämföras med varandra hänföras till ***samma tidpunkt***.

***Exempel. 177.*** Den 30 juni 1987 satte en person in 20 000 kr på ett bankkonto med 4 % ränta. Hur stort är kapitalet den 31 dec. 1998, om räntefoten hela tiden varit 4 % och räntan kapitaliserats vid slutet av a) varje år, b) varje halvår?

a) Den 31 dec. 1987 var hans tillgodohavande $20\,400$ kr, och den 31 dec. 1998 $20\,400 \cdot 1.04^{11} = 31404.86$ kr.

b) Med $2\,\%$ per halvår blir tillgodohavandet efter 23 halvår $20\,000 \cdot 1.02^{23} = 31\,537.99$ kr.

***Exempel. 178.*** När kunde man ta ut ett kapital ***dubbelt så stort*** som det man satte in den **31 dec. 1990** på ett konto som gav 5 % ränta?

Antag att den insatta summan var 1 000 kr och som står inne i ***n*** år. Vi får då ekvationen

$$1\,000 \cdot 1.05^n = 2\,000 \rightarrow 1.05^n = \frac{2\,000}{1\,000} \rightarrow 1.05^n = 2 \rightarrow n \cdot \log_{10}(1.05) = \log_{10}(2) \rightarrow$$

$$\rightarrow n = \frac{\log_{10}(2)}{\log_{10}(1.05)} \rightarrow n \approx 14.207$$ , d.v.s. under år 2005 eller efter 14 år och 75 dagar[2] eller den 15:e mars 2005.

***Exempel. 179.*** En fastighetsägare vill sälja sin gård och erbjuds av en spekulant A 204 milj. kr kontant och en annan B 160 milj. kr kontant och 55 milj. kr efter 6 år, även detta kontant utan räntetillägg. Vilket anbud bör han anta, om han kan placera sitt kapital med 5 % ränta på ränta?

Nuvärdet av B:s anbud är $160 + \frac{55}{1.05^6} = 201.041847$ milj. kr, varför A:s anbud bör antas.

***Exempel. 180.*** En person insätter under 15 års tid vid varje års början 2 000 kr på ett bankkonto som ger 4.5 % ränta på ränta. Hur mycket har han på kontot vid 15:e årets slut?

Då den sista insättningen stått inne 1 år och den första under 15 år, blir hans tillgodohavande

$$s = 2000 \cdot 1.045 + 2000 \cdot 1.045^2 + 2000 \cdot 1.045^3 + \ldots + 2000 \cdot 1.045^{15}$$

Då termerna bildar en geometrisk serie[3] med första termen $a = 2000 \cdot 1.045$, kvoten $q = 1.045$ och antalet termer utöver $a$ är 14, får vi $\frac{2\,000 \cdot 1.045 \cdot \left(1.045^{15} - 1\right)}{1.045 - 1} \rightarrow s = 43\,438.67$ kr;

[2] $360 \cdot 0.207 = 74.52 \approx 75$ dagar. (Räntan beräknas på 30 dagar per månad = 360 dagar per år).

[3] Se **(23.11)** sid. 227.

# Något om differentialekvationer

## 25.1 Inledning

Vi har i integralräkningen sysslat med uppgiften att bestämma den funktion, låt vara ***y***, vars derivata (eller differential) är given som funktion av ***x*** (eller är konstant). Till ekvationen

**(25.1)** $\frac{dy}{dx} = k$ eller $dy = k \cdot dx$ ($k$ = en konstant),

som är en ***differentialekvation***, då differentialer ingår i densamma, utgörs den ***allmänna lösningen*** (integralen) av

**(25.2)** $y = \int k \cdot \, dx \rightarrow y = k \cdot x + C$ ($C$ = godtycklig konstant).

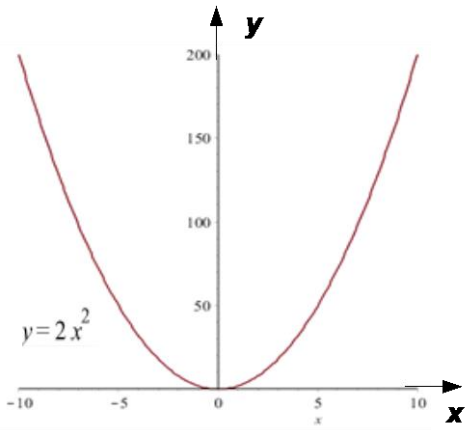
Differentieras denna ekvation återfås differentialekvationen.[1] För ett visst värde på $C$ (t.ex. $C = 0$, varvid $y = kx$) får vi en ***partikulär lösning*** (integral). Grafisk representeras den allmänna integralen i detta ex. av en skara parallella räta linjer med den av differentialekvationen bestämda vinkelkoefficienten ***k***; avskärningen $C$ av $y$-axeln är fritt valbar. Den partikulära lösning, för vilken $C = 0$, representeras av linjen $y = kx$ genom origo. Skall en integralkurva gå genom en given punkt, blir dess $C$-värde därigenom bestämt. Den av de räta linjerna, som går genom punkten (0, 2), har $C = 2$.

## 25.2 Exempel

***Exempel. 185.*** Lös diff.-ekv. $dy = 4\,x\,dx$ samt konstruera den integralkurva, som går genom origo.

Den allmänna lösningen blir $y = 2\,x^2 + C$ och representeras av en skara parabler med axlarna utefter $y$-axeln. Integralkurvan genom origo har ekvationen $y = 2\,x^2$.

De anförda differentialekvationerna har, förutom $dy$ och $dx$, endast innehållit variabeln $x$ (jämte konstanter). Om dessutom $y$ ingår, försöker vi skilja (separera) variablerna, i det vi om möjligt omforma ekvationen så, att dess ena led kommer att innehålla $x$ och $dx$, det andra ledet $y$ och $dy$. Sedan integreras ekvationens båda led.




***Graf. 40.*** *Ex. 185*

***Exempel. 186.*** Lös diff.-ekv. $x\,dy - y\,dx = 0$.

Vi skriver ekvationen under formen $\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x}$. Integreringen ger

**(25.3)** $\ln(y) = \ln(x) + C$ [2]

[1] På detta sätt får vi en kontroll på lösningens riktighet, I detta fall bortfaller integrationskonstanten $C$ vid differentieringen; i vissa fall kan man behöva eliminera $C$ för att återfå den ursprungliga differentialekvationen.

[2] De båda integrationskonstanterna har sammanfattats i en.

Sätter vi $C = \ln(c)$, kan den allmänna lösningen skrivas $y = cx$. Integralkurvorna blir en skara genom origo gående räta linjer. Den partikulära lösning, som gäller, om t.ex. $y = 2$ för $x = 1$, blir $y = 2x$. Denna kan även erhållas genom definit integrering:

**(25.4)** $$\int_2^y \frac{dy}{y} = \int_1^x \frac{dx}{x}, \text{ varav } y = 2x.$$

***Exempel. 187.*** Visa lösningen till diff.-ekv. $\frac{dy}{dx} = k \cdot y$ (**k** en konstant) om $y = a$ för $x = 0$.

Man får $\int_a^y \frac{dy}{y} = k \int_0^x dx$, varav $y = a \cdot e^{kx}$.

Konstruera kurvan för såväl pos. som neg. *k*-värde.

Denna diff.-ekv. (derivatan av funktionen är proportionell mot funktionen), vars lösning är en exponentialfunktion, förekommer ofta i tillämpningar. Funktionsändringen (ökning eller minskning alltefter som proportionalitetsfaktorn är pos. eller neg.) sägs ske ***organiskt***.[3]

***Exempel. 188.*** Lös diff.-ekv. $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 4y$.

Denna diff.-ekv. av ***2:a graden*** kan skrivas under formen $\pm \frac{dy}{2\sqrt{y}} = dx$, som integrerad blir $\pm \sqrt{y} = x + C$ eller $y = (x + C)^2$ en skara parabler, som alla tangeras av *x*-axeln (*x*-axeln sägs vara envelopp[4] till kurvskaran. Vi kan observera, att *x*-axelns ekvation $y = 0$ satisfierar diff.-ekv. men saknas i den allmänna lösningen. En sådan lösning kallas ***singulär***.)

Ingår **2:a ordningens derivata** (differential) i en diff.-ekv. sägs ekvationen vara av ***2:a ordningen*** osv. [5]
Lösningen till 2:a ordningens diff.-ekv. får vi efter två integrationer. Vid varje integrering införs en integrationskonstant, varför den allmänna lösningen till en 2:a ordningens diff.-ekv. bör innehålla två godtyckliga konstanter.

***Exempel. 189.*** Diff.-ekv. $\frac{d^2y}{dx^2} = k \cdot x$, där **k** är en konstant (elastiska linjens diff.-ekv. kan ha denna form), skriver vi $\frac{dy'}{dx} = kx$. Integration ger $y' = k \cdot \frac{x^2}{2} + C$. Efter ännu en integrering får vi den allmänna lösningen

**(25.5)** $$y = k \cdot \frac{x^3}{6} + Cx + C_1.$$

Känner man värdet av $y'$ och $y$ för något visst *x*-värde, får integrationskonstanterna bestämda värden.

[3] Benämningen kommer av, att organismerna växer approx. Enligt denna lag (t.ex. ett skogsbestånd, bakterierna i en bakterieodling).
[4] Se http://sv.wikipedia.org/wiki/Envelopp.
[5] De hittills behandlade differentialekvationerna har varit av 1:a ordningen.

# Några fysikaliska tillämpningar

## 26.1 Inledning

De räknemetoder, som vi i det föregående har gått igenom och tillämpat på en del uppgifter av huvudsakligen geometrisk art, utgör även naturliga hjälpmedel vid en mångfald problemlösningar inom ren och tillämpad naturvetenskap.
Vi kommer här att gå igenom några från fysiken (inklusive mekaniken) hämtade viktiga tillämpningar.

## 26.2 Ur mekaniken

Med en partikels ***hastighet v*** vid en viss ***tidpunkt t*** (den tillryggalagda ***vägen*** är ***s***) förstår vi det gränsvärde, vartill kvoten $\frac{\triangle s}{\triangle t}$ (där $\triangle t$ är ett tillskott i ***t*** och $\triangle s$ motsvarande tillskott i ***s***) alltmer närmar sig, när $\triangle t$ (och därmed även $\triangle s$) de obegränsat går mot 0. Alltså:

**(26.1)** $$v = \left( \lim_{\triangle t \to 0} \right) \frac{\triangle s}{\triangle t} = \frac{ds}{dt}$$

Hastigheten är alltså derivatan av vägen med avseende på tiden.

Ritar vi upp vägen som funktion av tiden (***st***-diagram), anger hastigheten kurvans stigning. Även hastighetens variation med tiden kan åskådliggöras grafiskt (***vt***-diagram).

**(26.2)** Då $ds = v \cdot dt$, blir $s = \int v \, \mathrm{d}t.$

Är hastigheten given som funktion av tiden, får vi vägen genom integration. ***Vägen*** redovisas av den mellan ***vt***-kurvan, ***t***-axeln och ***tidsgränserna*** inneslutna arean.[1]

Om hastigheten är uttryckt som funktion av vägen, får vi ***tiden*** av att

**(26.3)** $$dt = \frac{ds}{v}, \quad \because \; t = \int \frac{ds}{v}$$

***Accelerationen a*** får vi i likhet med hastigheten genom en gränsövergång.

**(26.4)** $$a = \left( \lim_{\triangle t \to 0} \right) \frac{dv}{dt} = \frac{d^2 s}{dt^2}.$$

Vid ***kroklinig rörelse*** är detta accelerationen i banans riktning, ***tangentialaccelerationen***.

Accelerationen vinkelrätt mot banan, normal- eller ***centripetalaccerationen***, är enligt mekaniken $\frac{v^2}{r}$, där ***r*** är banans krökningsradie.

Då $dv = a \, dt$, blir $v = \int a \, \mathrm{d}t$. Av $dt = \frac{dv}{a}$ får vi $t = \int \frac{dv}{a}$.

Redovisa de olika diagram, som här kan ritas.

[1] Hur medelhastigheten, beräknas visas med **(16.5),** fig. 35, sid 147.

En partikels rörelse (i ett plan) betraktas ofta som sammansatt av två rätliniga rörelser längs två mot varandra vinkelräta axlar (*x*- och *y*-axlarna). Man får då bankurvans koordinater uttryckta som funktioner av tiden ***t***. Elimineras parametern ***t***, får man bankurvans ekvation (jämför kaströrelsen).

Vid en kropps rotation kring en axel inför man i analogi med den föregående ***vinkelhastigheten*** $\omega = \frac{d\alpha}{dt}$, där ***α*** är ***vridningsvinkeln***, samt ***vinkelaccelerationen*** $\varphi = \frac{d\omega}{dt}$.

***Exempel. 191.*** En partikel rör sig i rät linje enligt ***lagen*** $s = c_0 + c_1 t + c_2 t^2$.
Redovisa rörelsens art och betydelse av konstanterna $c_0, c_1$ och $c_2$.
Vi får:

**(26.5)** $v = c_1 + 2\,c_2 t,\ a = 2\,c_2$.

Rörelsen är likformigt accelererad (***accelerationen konstant***), $c_0$ är ***begynnelsevägen*** (värdet av ***s*** för ***t*** = 0), $c_1$ ***begynnelsehastigheten*** och $c_2$ ***halva accelerationen***.

En i ett lufttomt rum uppåt eller nedåt kastad partikel rör sig enligt den uppställda lagen, varvid $2\,c_2 = g \approx 9.81$ m/sek2.

***Exempel. 192.*** Vid en partikels rörelse längs en rät linje är hastigheten ***v*** proportionell mot partikelns avstånd ***s*** från en punkt på linjen, alltså $v = k \cdot s$ (***k*** en konstant).

Om $s = s_0$ för $t = 0$, sök ***s*** som funktion av tiden:

Av $\frac{ds}{dt} = k \cdot s$ får vi:

**(26.6)** $\int_{s_0}^{s} \frac{ds}{s} = k \int_0^t dt$, varav $s = s_0 \cdot e^{kt}$.

Hastigheten $v = k s_0 e^{kt}$. Om ***partikeln saknar begynnelsehastighet***, fordras alltså, att $s_0 = 0$. Någon rörelse enligt den förutsatta lagen kommer då inte till stånd.
Innan Galilei funnit den verkliga lagen för fallrörelse, prövade han försökvis det i detta ex. gjorda antagandet, vilket han förkastade såsom orimligt.

Mellan den ***kraft P***, som påverkar en partikel med massan ***m***, och partikelns acceleration ***a*** råder sambandet $P = m \cdot a$, den s.k. ***kraftekvationen***. Vi kan nu skriva detta samband

**(26.7a)** $P = m \frac{dv}{dt} = m \frac{d^2 s}{dt^2}$.

# Komplexa tal[1]

## 27.1 Ett tankeexperiment

Fram till detta kapitel har vi i stort sätt befunnit oss på tallinjen där vi finner negativa- och positiva-, hela-, rationella-, och irrationella tal. Med dessa tal kan vi beskriva fenomen som vi kan uppfatta med våra sinnen.
Där finns också fenomen, som matematiskt är lätt att förstå, men kanske lite svårare att förstå i den fysiska verklighet, som vi befinner oss i.

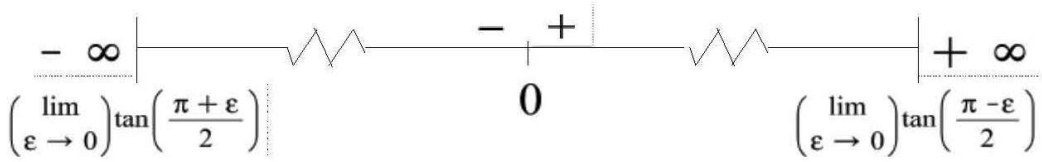



***Bild. 36.*** *Begreppet oändligheten*

Om vi i bild 37 låter $\varepsilon \to 0$ så ökar vinkeln $\alpha$ tills $\tan\left(\frac{\pi-\varepsilon}{2}\right)$ går mot $+\infty$ samtidigt går $\tan\left(\frac{\pi+\varepsilon}{2}\right)$ mot $-\infty$ ty $\frac{1}{-\varepsilon}$ är negativt.
Vinkelökningen för **α** är här mikroskopisk och vi förflyttar oss momenttant på tallinjen från $+\infty$ till $-\infty$. Hur kunde detta hända om tallinjen tillhör den fysiska världen. Här förflyttar vi oss med högre hastighet än ljuset, men det är inte möjligt.

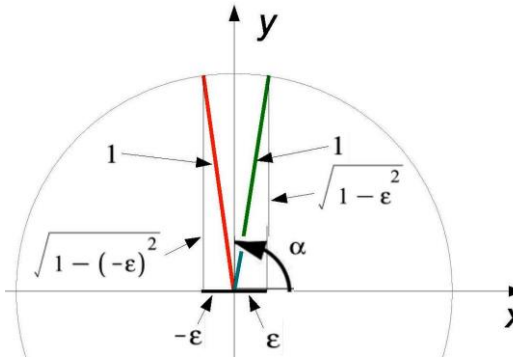



***Bild. 37.*** *Från + till - oändligheten*

Om vi tänker oss universum som efter ”Big bang” har fått en oändlig diameter. Färdas man utmed denna sfärs ekvator, som vi kallar ”tallinjen”, och kommer så långt bort som möjligt, når vi en position som vi uppfattar som **plus** oändligheten. Gör vi om vår resa i motsatt riktning så når vi **minus** oändligheten, samtidigt, som vi då möter vår tidigare ände på vår färd till + oändligheten.

Med detta tankeexperiment kan vi även förflytta oss momentant från + oändligheten till – oändligheten utan att vi behöver överskrida ljusets hastighet. Men låt oss nu stifta bekantskap med de komplexa talen.

## 27.2 Inledning

Definition:

Ett ***komplext tal z*** är ett ***ordnat par*** (***a***, ***b***) av ***reella*** tal ***a*** och ***b***. Ett komplext tal av typen (***a***, 0) innebär att talet ***b*** befinner sig på tallinjen och vi uppfattar det som det reella talet ***a***.

Är ***b positivt*** befinner talet ***ovanför tallinjen*** och är ***b negativt*** befinner sig talet ***nedanför tallinjen***. De två sista talen är ***imaginära*** tal. Alla ***reella*** tal kan beskrivas som talpar, där ***b*** är lika med ***noll***.

[1] Många idéer i detta kapitel har hämtats från bl. a. Kjellberg, B, ”Högre ingenjörskurs i matematik”, Hermods, Malmö, 1961.

Det komplexa talet $(a, b)$ är ordnat och är inte detsamma som det komplexa talet $(b, a)$, för $a \neq b$.

### 27.2 .1 Addition av komplexa tal

Två komplexa tal adderas som följer:

**(27.1)** $$(a,b) + (c,d) = (a + c,\ b + d).$$

***Exempel. 205.*** $(3,9) + (4,-10) = (7,-1).$

### 27.2 .2 Subtraktion av komplexa tal

Våra två tal är:

**(27.2)** $$(a,b) - (c,d) = (a,b) + (-c,-d) = (a - c,\ b - d).$$

***Exempel. 206.*** $(3,9) - (4,-10) = (3,9) + (-4,10) = (-1,19).$

### 27.2 .3 Multiplikation av komplexa tal

Våra två tal är:

**(27.3)** $$(a,b)\cdot(c,d) = (ac - bd,\ ad + bc).$$ [2]

***Exempel. 207.*** $(3,9)\cdot(4,-10) = (3\cdot 4 - 9\cdot(-10),\ 3\cdot(-10) + 9\cdot 4) = (102,\ 6).$

### 27.2 .4 Division av komplexa tal

Våra två tal är:

**(27.4)** $$\frac{(a,b)}{(c,d)} = (a,b)\cdot\left(\frac{c}{c^2+d^2}, \frac{-d}{c^2+d^2}\right) =$$ [3]

$$= \left(a\cdot\frac{c}{c^2+d^2} - b\cdot\frac{-d}{c^2+d^2},\ a\cdot\frac{-d}{c^2+d^2} + b\cdot\frac{c}{c^2+d^2}\right)$$

***Exempel. 208.*** $$\frac{(3,9)}{(4,-10)} = (3,9)\cdot\left(\frac{4}{4^2+10^2}, \frac{10}{4^2+10^2}\right) = (3,9)\cdot\left(\frac{4}{116}, \frac{10}{116}\right) =$$

$$= \left(3\cdot\frac{4}{116} - 9\cdot\frac{10}{116},\ 3\cdot\frac{10}{116} + 9\cdot\frac{4}{116}\right) = \left(\frac{12-90}{116}, \frac{30+36}{116}\right) = \left(-\frac{78}{116}, \frac{66}{116}\right) \rightarrow$$

$$\rightarrow \left(-\frac{39}{58}, \frac{33}{58}\right)$$

[2] Regeln ser egendomlig ut, men klarnar när symbolen ***i*** införs.

[3] Regeln är densamma som multiplikation av $(a,b)\cdot\left(\frac{c}{c^2+d^2}, \frac{-d}{c^2+d^2}\right)$.