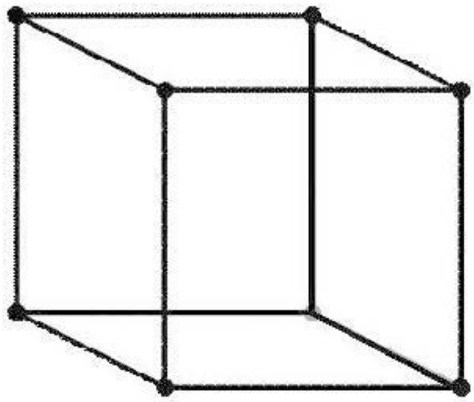
KURS A och B lärobok med övningsuppgifter
Naturvetenskap och teknik

Sigurd Eriksson

Matematik

DEL I



bearbetad av
Lennart Gombrii

Nyutgåva av
Sigurd Eriksson Matematik I & II

Del I	Del II
325 exempel, 1365 övningsex.	236 exempel, 1400 övningsex. 10 prov
Antal sidor: 404 (212 ark)	Antal sidor: 346 (183 ark)
Vikt: 1360 g	Vikt: 1175 g
Dimension: 210 x 297 x 31 mm	Dimension: 210 x 297 x 30 mm
Tryck: Fyrfärg	Tryck: Fyrfärg
Bindning: Manuellt bunden bok, limmad rygg, klotband, hård pärm	Bindning: Manuellt bunden bok, limmad rygg, klotband, hård pärm

Förord

När jag för två år sedan fick ta del av uppgiften om att våra gymnasieelevers matematikkunskaper har drastiskt sjunkit de senaste 10 åren, beslöt jag mig att ge dagens elever möjligheten att ta del av

Sigurd Erikssons

läroböcker, som jag läste i årskurs 1 och 2 i det treåriga Högre Tekniska Gymnasiet (TGÖ) i Örebro.

CARL SIGURD ERIKSSON

Fil. magister, Örebro. — F. i St. Tuna, Kopparb. län, 1889 7/4. Mog.-ex. i Falun 08; fil. ämbetsex. i Uppsala 12. Extra lärare vid Tekn. skolan i Örebro 17 o. vik. lektor vid Tekn. gymnasiet i Örebro fr. 20.

Sigurd Erikssons bakgrund[1]

Eriksson var verksam i TGÖ från 1917 till sin död 1948.

Läroböckerna var ämnade att ge eleverna en stabil matematisk grund för att kunna arbeta som ingenjörer i samhället och industrin samt förbereda eleverna för högre studier på universitet och tekniska högskolor.

Många elever, som läste vidare på KTH i Stockholm och Chalmers Tekniska Högskola i Göteborg, kunde hoppa över den första årskursen p.g.a. sina goda förvärvade matematikkunskaper från TGÖ.

För att följa dagens läroplan har jag lagt till kapitel 24 Statistik.

Varje kapitel följer, där så är möjligt, samma struktur:

- Läroboksavsnitt
- Lösningsförslag
- Övningsuppgifter
- Facit till övningsuppgifterna

Exemplen är uppdelade i:

- *Exempel. nnn,* t.ex. ***Exempel. 227***. – där Eriksson har visat lösningen.
- *Ex.nnn*, t.ex. ***Ex. 212. –*** där Eriksson inte har visat någon lösning[2].
- *önnn.* t.ex. ***ö912.*** – där det endast finns facit för att eleverna skall, utan övrig hjälp, lösa uppgifterna.

[1] Uppg. från Tekniska Föreningen i Örebro.

[2] Här är det matematiklärarnas ansvar att förklara en möjlig lösning. **Ett förslag till lösning** återfinns normalt i avsnittet Lösningsförslag.

Decimalkomma / punkt

Engelsk matematisk litteratur använder decimalpunkt för att avskilja decimalerna. Även många miniräknare använder decimalpunkt. Vid framställning av denna bok har jag använt Microsofts Word, MathType från Design Science och Maple 16 från Maple Soft. Det senare programmet avskiljer decimalerna med decimalpunkt. Ersättes decimalpunkten med ett decimalkomma uppstår det ett mellanslag efter decimalkommat och talet ser endast konstigt ut. Exempel: 3,14159 blir Maple 16 - 3.14159 men byter man till decimalkomma får vi $3,\ 14159$. Därför får vi:

- skiljetecknet som decimal-*komma* vid användning av Word och MathType
- skiljetecknet som decimal-*punkt* vid användning av Maple 16 .

Målgrupp

Denna bok och den efterföljande ”**Matematik Del II**” [3] vänder sig till elever, som önskar sig matematiska verktyg för att lösa konkreta problem i sin yrkesutövning och för att underlätta studierna på universitetsnivå.

Övrigt

Innan du angriper en uppgift, försök att lägga upp en ***strategi*** för hur du skall angripa problemställningen.[4] Diskutera gärna med dina klasskamrater, om hur ni tillsammans kan finna ut den bästa strategin för att hitta lösning till uppgifterna. Det finns alltid flera möjliga vägar att lösa en uppgift.

Omslagsbildens kub ser du antingen nerifrån eller ovanifrån. Perspektivet växlar utan att du kan påverka det. På samma sätt dyker ett annat lösningsalternativ upp i din hjärna, när du försöker finna en framkomlig väg till lösning. Har du svårt att finna en lösning på kvällen, så är det ofta lätt att hitta lösningen på morgonen dagen efter, då din hjärna är utvilad och själv utan din vetskap bearbetat problemet när du sovit.

Tänk på att vårda din hälsa – var rädd om din hjärna och kropp, ät näringsrik mat, motionera och unna dig sömn och vila för att orka med studierna.

Jag får här framföra mitt tack till Tekniska Föreningen i Örebro och till Sveriges Läromedelsförfattares Förbund – SLFF, som bistått mig i min strävan att återutgiva denna nu bearbetade utgåva av Sigurd Erikssons läroböcker.

Jag får även framföra mitt tack till Maple Soft, som kostnadsfritt upplåtit programvaran ”Maple 16” till mig vid framställning av denna bok.

Kungsbacka februari 2013

Lennart Gombrii

[3] Planeras komma ut år 2014 – 2015.
[4] Se avsitt ”6.4 Hjärngymnastik/Färjkarlen”, där du måste göra upp en strategi för att lösa uppgiften.

Innehållsförteckning

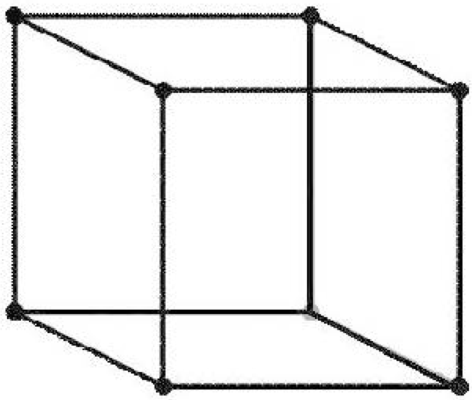
Utdrag från boken

KURS A och B lärobok med övningsuppgifter
Naturvetenskap och teknik

Sigurd Eriksson

Matematik

DEL I



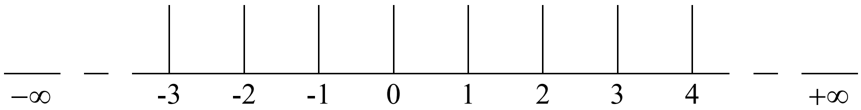
bearbetad av

Lennart Gombrii

Om våra tal

1.1 Reella tal

Reella tal är de tal, som kan avbildas på en s.k. tallinje.



Bland de reella talen kan vi nämna:

Hela tal

De **hela talen;** och bland dem de **naturliga talen** 1, 2, 3, 4, 5, … … $+\infty$. Lägger man till 0 får vi de **hela positiva talen** 0, 1, 2, 3, 4, 5, … … $+\infty$.
De **hela negativa talen** utgörs av $-\infty$ **… …** -3, -2, -1. **Noll** är **gränsvärdet** mellan de negativa och de positiva talen. Det finns oändligt många **negativa** tal, men även oändligt många **positiva** tal.

Rationella tal

De **rationella talen** har formen $\dfrac{p}{q}$ där q är $\neq 0$ (betyder ”q skilt från 0”). p benämns täljaren och q nämnaren. Det finns oändligt många fler rationella tal än hela tal. Bara mellan 0 och ½ finns det oändligt många rationella tal; $\dfrac{1}{+\infty}, \ldots, \dfrac{1}{5}, \dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{2}$. Går vi sedan vidare till 2 i täljaren finner vi även där oändligt många tal; $\dfrac{2}{+\infty}, \ldots, \dfrac{2}{7}, \dfrac{2}{6}, \dfrac{2}{5}, \dfrac{2}{4}$. osv. till höga tal i täljaren.
På analogt sätt finns det även oändligt många negativa rationella tal. OBS! Täljaren får inte vara jämt delbar med nämnaren, då den därmed övergår till att vara ett helt tal.
Rationella tal uttryckt ofta i decimalform kan avslutas med oändligt långa sifferserier med en återkommande frekvens på 1 – 6 siffror, som upprepas oändligt många gånger.

Exempel: $\dfrac{1}{9} = 0{,}1111111\ldots$; $\dfrac{1}{7} = 0{,}142857142857142857142857\ldots$;

Ett rationellt tal i formen $\dfrac{p}{q}$ är ett exakt värde på talet, medan decimalformen endast är ett närmevärde av talet. Ju fler decimaler, desto högre precision får man på talet. Decimalformen kan även avslutas med ett oändligt antal nollor.

Vill vi ha ett decimalbråk, som avslutas med återkommande sifferserier, kan vi lätt omvandla dem till bråk i formen $\dfrac{p}{q}$.

Exempel: a) Betrakta 0,111111111 . . . som vi sätter till *x*. Då periodlängden är här 1 siffra, multiplicerar vi med 10:

$$\begin{array}{rrcl} & 10x & = & 1{,}111111111\ldots \\ \text{men} & -x & = & -0{,}111111111\ldots \\ \hline & 9x & = & 1 \end{array}$$

Dividerar vi båda leden med 9 får vi $x = \dfrac{1}{9}$ som är den ursprungliga $\dfrac{p}{q}$ formen.

b) Betrakta även 0, 142857 142857 142857 142857 .... som vi även sätter till x. Här är periodlängden 6 siffror varför vi får multiplicera med $10^6 = 1000000$.

$$\begin{array}{rcl} 1000000\,x & = & 142857,\,142857\;142857\;142857\;... \\ -x & = & \underline{\quad -0,\,142857\;142857\;142857\;...} \\ 999999\,x & = & 142857 \end{array}$$

Dividerar vi båda leden med 999999 får vi $x = \dfrac{142857}{999999}$ som efter förkortning med täljarenens 142857 erhåller $x = \dfrac{1}{7}$ som är den ursprungliga $\dfrac{p}{q}$ formen.

Irrationella tal

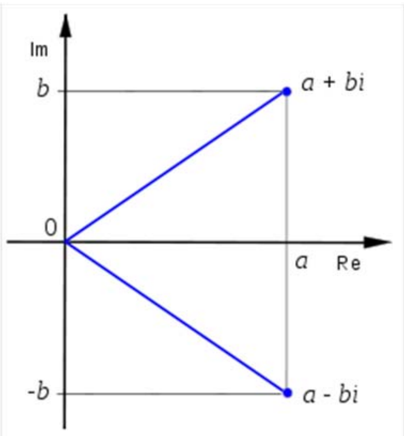
De irrationella talen är oändligt många fler än de rationella talen och utgör huvudmassan av mängden reella tal. Här finner vi $\sqrt{2} \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{5} \cdot \sqrt[3]{7} \cdot \pi \cdot e$ etc. De irrationella talen uttryckt i decimalform har inga återkommande sifferserier utan decimalerna, varieras i all oändlighet t.ex. $e \approx 2.718281828\ldots\ldots$; $\pi \approx 3.14159265358979323846264338327950288419716939937 51...$
;

Pi (π) förekommer i naturen där man minst kan ana. T.ex. så utbreder sig sanddynor i cirkelbågar, kustens vikar följer ofta cirkelbågar och floders vindlingar på slätter går mestadels utmed cirkelbågar.

Om man avbildar ett irrationellt tal med ett decimalbråk, så är det endast ett närmevärde medan symbolen π och rotuttrycket $\sqrt[3]{5}$ är exakta beskrivningar av talen.

1.2 Komplexa tal

Komplexa tal är de tal som ligger på sidan av tallinjen. De komplexa talen är oändligt många fler än de reella talen. För varje reellt tal finns det oändligt många komplexa tal. [1]
”



Komplexa talplanet. Ett komplext tal (a + bi) och dess konjugerade värde (a - bi).

Bild 2 *Komplexa talpar*[2]

[1] Följande är hämtat från http://sv.wikipedia.org/wiki/Komplexa_tal.
[2] Re= Den reella axeln (tallinjen), Im= Den imaginära axeln, O= origo.

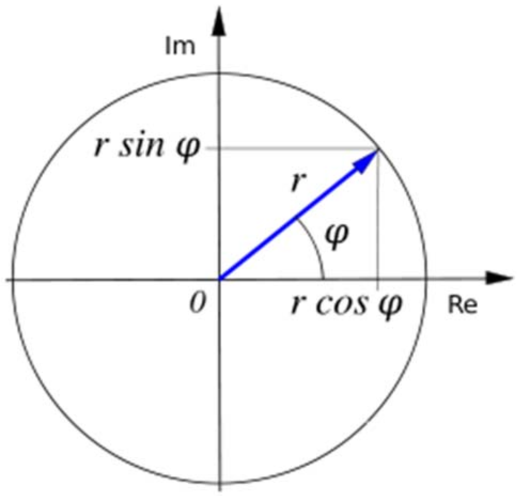


Bild 3 *Komplext tal i polär form*

Ett komplext tal framställt i polär form där r är talets absolutbelopp och φ är talets argument

De **komplexa talen** är en talmängd som kan ses som en utvidgning av de reella talen. Ett komplext tal kan skrivas som

$$z = a + b\,i$$

där det reella talet *a* är **realdelen** och det reella talet *b* är **imaginärdelen** samt *i* är den imaginära enheten som definieras av

$$i^2 = -1$$

Denna framställning av ett komplext tal kallas också **rektangulär form**.
Konjugatet $\bar{z}$ till ett komplext tal $z = a + bi$ definieras som

$$\bar{z} = a - b\,i.”$$

Utan de komplexa talen kunde inte radarn vara till nytta för flygledningen på en flygplats. Uträkningen utan dessa blir för långsam så att planen redan har landat innan de dyker upp på radarskärmen.

1.3 Primtal

Ett primtal är bara dividerbart med sig själv eller med 1. Det finns oändligt många primtal.

Här följer de **85** första primtalen:
2 3 5 7 11 13 17 19 23 29 31 37 41 43 47 53 59 61 67 71 73 79 83 89 97 101 **103** 107 109 →
→ 113 127 131 137 139 149 157 163 167 173 179 181 191 193 197 199 211 223 227 →
→ 229 233 239 241 251 257 263 269 271 277 281 283 307 311 313 317 331 337 347 →
→ 349 353 359 367 373 379 383 389 397 401 409 419 421 431 433 439 443 449 457 461 →
→ 463 467 479 487 491 499 . . . . .

Exempel:
För att undersöka om ett tal, här 103, är ett primtal räcker det således *att pröva med alla primtal som är* ***mindre än*** *kvadratroten ur talet*. Kvadratroten ur 103 är cirka 10 (10,14889157...) varför det räcker med att testa om 103 är delbart med något av talen 2, 3, 5 eller 7:

- Talet är udda och är därmed inte delbart med 2.
- Talets *siffersumma* (**1** + **0** + **3**) är inte delbar med **3**, då är talet inte heller delbart med 3.
- Talet slutar inte på 0 eller 5 och är därför inte delbart med 5.
- Talet är inte heller delbart med 7

Alltså är **103** ett primtal[3].

[3] Se Wikipedia: http://sv.wikipedia.org/wiki/Primtal

1.4 Hjärngymnastik

De tolv kulorna

Du har 12 kulor numrerade från 1 till 12.

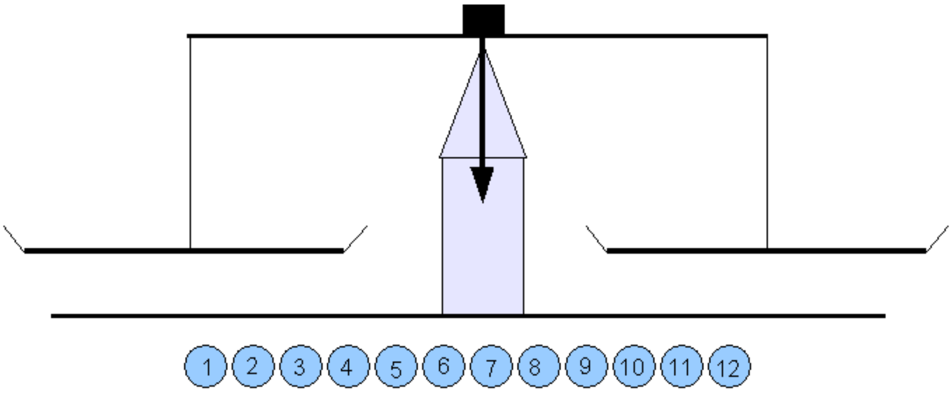


Bild 4 *Balansvåg med 12 kulor*

Elva av dessa väger exakt lika mycket men en kula avviker i vikt. Du skall ta reda på vilken kula som avviker och visa om den är tyngre eller lättare jämfört med någon av de övriga elva kulorna. Till hjälp har du endast en *balansvåg*. M.a.o. du skall kunna få 24 svar och du får *endast göra tre vägningar*.

Repetition av grundskolans kurs

*”Som förutsättning för gymnasiets matematikkurs är att man behärskar addition, subtraktion, multiplikation och division med hela tal och bråk – korrekt och snabbt. Man bör veta att bråket har formen $\frac{T}{N}$ där **T** kallas täljare och **N** nämnare – inte tvärtom! Man kan multiplicera både täljare och nämnare med samma tal, det kallas **förlängning**. Man kan även dividera täljare och nämnare med samma tal, det kallas **förkortning**. Förlängning och förkortning ändrar inte bråkets värde. Man bör vara i stånd att ”**göra liknämnigt**” genom förlängning och kunna utföra räkne-operationer som* $\frac{7}{12}+\frac{4}{15}=\frac{7*5}{12*5}+\frac{4*4}{15*4}=\frac{35}{60}+\frac{16}{60}=\frac{51}{60}$.

*Vid addition och subtraktion, t.ex. 5 + 2,7 - 4,10 + 3 – 2 + 15 - 8, kallas talen för **termer** och vid multiplikation, t.ex.* $10 \cdot 3 \cdot 8$, *för **faktorer**. Vid addition kallas resultatet **summa** och vid multi-plikation **produkt**.*

Dividerar man t.ex. 147 med 39, får man heltalskvoten 3 och resten 30. Det gäller att

$147 = 3 \cdot 39 + 30$. *Man kallar 147 **dividend** och 39 **divisor**. Allmänt gäller, att:*

$$\textbf{(2.1)}\quad \textit{Dividenden} = \textit{Heltalskvoten} * \textit{Divisorn} + \textit{Resten}$$ ”[1]

2.1 Kvadreringsreglerna

Första kvadreringsregeln

Exempel på algebraiska räkneregler finner vi i härledning av rubricerad regel.

$$(a+b)*(a+b)=a(a+b)+b(a+b)=a^2+ab+ab+b^2=a^2+2ab+b^2$$

alltså

(2.2) $$(a+b)\cdot(a+b)=a^2+2ab+b^2$$ [2]

Uttrycket kan även läsas från höger till vänster.

Andra kvadreringsregeln

Den andra kvadreringsregeln är som följer.

$$(a-b)*(a-b)=a(a-b)-b(a-b)=a^2-ab-ab+b^2=a^2-2ab+b^2$$

alltså

(2.3) $$(a-b)\cdot(a-b)=a^2-2ab+b^2$$

Uttrycket kan även läsas från höger till vänster.

[1] Högre ingenjörskurs i matematik, Professor Kjellberg, Bo, Hermods – Malmö.
[2] $2ab$ är *implicit* (underförstått) $2a \cdot b$.

Konjugatregeln

Konjugatregeln är som följer.

$$(a+b)\cdot(a-b)=a\cdot(a-b)+b\cdot(a-b)=a^2-\cancel{ab}+\cancel{ab}-b^2=a^2-b^2$$

alltså

(2.4) $$(a+b)\cdot(a-b)=a^2-b^2$$

Uttrycket kan likaledes läsas från höger till vänster.

Konjugatregeln är mycket praktiskt att tillämpa i det dagliga livet.
Skall du räkna ut t.ex. 38 * 32 som blir med konjugatregeln:

$(35 + 3) * (35 - 3) = 35^2 - 3^2 = 1225 – 9 = 1216.$

Kvadraten på 15 blir $1\cdot 2=2$ med tillägg av 25 bakom hundratalssiffran och du får 225. På samma sätt gör du med övriga kvadrater, som slutar på 5. För t.ex. 25^2 får vi $2\cdot 3=6$ med tillägg av 25 = 625, osv. Generellt gäller för kvadrering av tal som slutar på 5:

$$(n5)^2=n*(n+1)*100+25$$

Utöver detta måste du kunna:

$$(a-b)\cdot\left(a^2+a\cdot b+b^2\right)=a\cdot\left(a^2+a\cdot b+b^2\right)-b\cdot\left(a^2+a\cdot b+b^2\right)=$$
$$=a^3+\cancel{a^2\cdot b}+\cancel{a\cdot b^2}-\cancel{a^2\cdot b}-\cancel{a\cdot b^2}-b^3=\left(a^3-b^3\right)$$
$$\because\quad a^3-b^3=(a-b)\cdot\left(a^2+a\cdot b+b^2\right)$$

(2.5) $$a^3-b^3=(a-b)\cdot\left(a^2+ab+b^2\right)$$

$$(a+b)\cdot\left(a^2-a\cdot b+b^2\right)=a\cdot\left(a^2-a\cdot b+b^2\right)+b\cdot\left(a^2-a\cdot b+b^2\right)=$$
$$=a^3-\cancel{a^2\cdot b}+\cancel{a\cdot b^2}+\cancel{a^2\cdot b}-\cancel{a\cdot b^2}+b^3=a^3+b^3$$
$$\because\quad a^3+b^3=(a+b)\cdot\left(a^2-a\cdot b+b^2\right)$$

(2.6) $$a^3+b^3=(a+b)\cdot\left(a^2-a\cdot b+b^2\right)$$

samt kanske

$$(a-b)\cdot\left(a^4+a^3\cdot b+a^2\cdot b^2+a\cdot b^3+b^4\right)=a\cdot\left(a^4+a^3\cdot b+a^2\cdot b^2+a\cdot b^3+b^4\right)-$$
$$-b\cdot\left(a^4+a^3\cdot b+a^2\cdot b^2+a\cdot b^3+b^4\right)=$$
$$=a^5+\cancel{a^4\cdot b}+\cancel{a^3\cdot b^2}+\cancel{a^2\cdot b^3}+\cancel{a\cdot b^4}-\cancel{a^4\cdot b}-\cancel{a^3\cdot b^2}-\cancel{a^2\cdot b^3}-\cancel{a\cdot b^4}-b^5=a^5-b^5$$
$$\because\quad a^5-b^5=(a-b)\cdot\left(a^4+a^3\cdot b+a^2\cdot b^2+a\cdot b^3+b^4\right)$$

(2.7) $$a^5-b^5=(a-b)\cdot\left(a^4+a^3\cdot b+a^2\cdot b^2+a\cdot b^3+b^4\right)$$

och

$$(a+b)\cdot\left(a^4-a^3\cdot b+a^2\cdot b^2-a\cdot b^3+b^4\right)=a\cdot\left(a^4-a^3\cdot b+a^2\cdot b^2-a\cdot b^3+b^4\right)+$$
$$+b\cdot\left(a^4-a^3\cdot b+a^2\cdot b^2-a\cdot b^3+b^4\right)=a^5-\cancel{a^4\cdot b}+\cancel{a^3\cdot b^2}-\cancel{a^2\cdot b^3}+\cancel{a\cdot b^4}+$$
$$+\cancel{a^4\cdot b}-\cancel{a^3\cdot b^2}+\cancel{a^2\cdot b^3}-\cancel{a\cdot b^4}+b^5=a^5+b^5$$
$$\because\quad a^5+b^5=(a+b)\cdot\left(a^4-a^3\cdot b+a^2\cdot b^2-a\cdot b^3+b^4\right)$$

(2.8) $$a^5+b^5=(a+b)\cdot\left(a^4-a^3\cdot b+a^2\cdot b^2-a\cdot b^3+b^4\right)$$

2.2 Pytagoras sats

”Pythagoras sats” anger sambandet mellan sidorna i en ***rätvinklig triangel***. Den grekiske matematikern Pythagoras anses vara den första, som bevisade satsen, men den var troligen känd i bland annat i Babylon redan tidigare. Satsen är en av matematikens mest kända bland den breda allmänheten.

Den traditionella formuleringen av Pythagoras sats är: **(2.9)** $a^2+b^2=c^2$

Kvadraten på ***hypotenusan*** **(c)** är lika med summan av kvadraterna på ***kateterna*** **(a och b)**.

Hypotenusan är den längsta sidan i en rätvinklig triangel, som står mot den räta vinkeln och ***kateterna*** är de två övriga sidorna, som bildar den räta vinkeln.

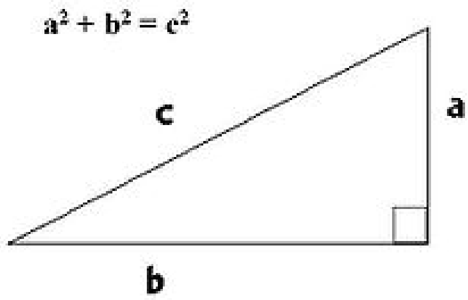


Bild 5 *Rätvinklig triangel*

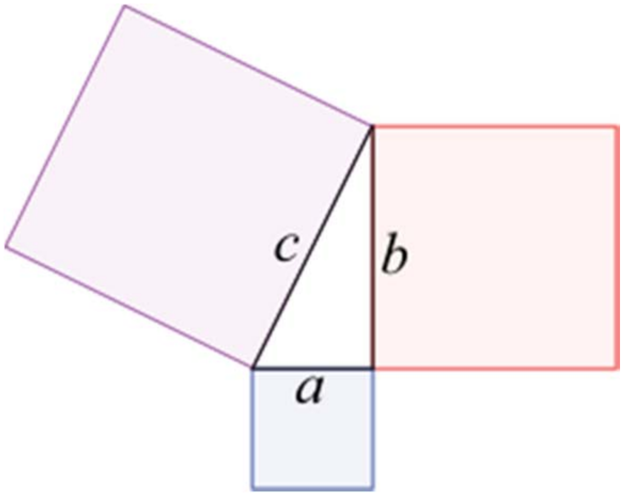


Bild 6 *Pytagoras sats* $a^2+b^2=c^2$

För a = 3, b = 4 blir c = 5 eller kvadraterna 9 + 16 = 25.

Mittpunktsnormal

En **mittpunktsnormal** till en sträcka är en normal (vinkelrät mot sträckan) som går genom dess mittpunkt.

De tre mittpunkstsnormalerna till sidorna i en triangel skär varandra i en punkt, centrum för triangelns omskrivna cirkel.”[3]

[3] http://matmin.kevius.com/trianglar.php#retv

Om felberäkning

Exempel: Ett rums längd uppmättes på fem olika ställen till: 666, 669, 666, 666 och 668 cm, (kolumn B nedan). Adderas talen och den därmed erhållna summan divideras med antalet observationer får vi det aritmetiska medeltalet 667, se kolumn E rad (6) nedan.

För att få ett mått på noggrannheten i mätningen tar man nu skillnaden mellan detta medelvärde och respektive uppmätta värde. Vi får då +1, -2, +1, +1, och -1 cm. Den numeriskt största avvikelsen från medelvärdet, (dvs. absolutvärdet) är 2. Mätningen kan sägas vara utförd på 2 cm när eller behäftat med ett fel (egentligen felgräns) på 2 cm. Resultatet kan vi skrivas som 667 ± 2 cm och anger därmed att den riktiga längden ligger mellan 665 och 669 cm.

A	**B**	**C**	**D**	**E**	**F**
Mätning nr	**Mått i cm**	**Ack summa**	**C/A**	**E(6) - Bx**	**E7/E6*100**
1	666	666	666,00	**1**	
2	669	1 335	667,50	**-2**	
3	666	2 001	667,00	1	
4	666	2 667	666,75	1	
5	668	3 335	**667,00**	-1	
(6)	Aritmetiskt medelvärde:			**667,00**	
(7)	Den största absoluta avvikelsen: **E2**			**2**	
(8)	Avvikelse i % av medelvärdet:				**0,30**

Tabell 1. *Mätvärden - längdavvikelse*

Att övergå till att mäta i mm är här meningslöst, när felet är ± 2 cm och uttryckt i procent
$\frac{2}{667} \cdot 100 = 0,3\,\% \cdot$

Mätfelet kan också teckna som $\left(667 \pm \frac{0,3}{100} \cdot 667\right)$ cm eller $667 \cdot \left(1 \pm \frac{0,3}{100}\right)$ cm.

Ofta kan man utan att upprepa en observation bilda sig en uppfattning om storleken av felet (felgränsen). Om man t.ex. vid inställning mellan två skalstreck å en skala avläser i hela skaldelar, kan felet pga. avläsningen inte uppgå till en hel skaldel. (Skattar man antalet tiondels skaldelar, blir felet ännu mindre). Anges ett mätresultat (eller ett approximativt tal i allmänhet) utan att felets storlek anges, räknar man med, att värdet är riktigt på 1 enhet i sista *gällande* siffran. Den sista siffran är inte alltid gällande siffra. Om man anger en längd till 8**2**000 mm, är alla siffrorna gällande, om mätningen skett på 1 **mm** när; är däremot samma sträcka uppmätt på 1 **m** när, är **2**:an sista gällande siffra. I senare fallet skrivs hellre 8**2** m eller $82 * 10^3$ mm. (Vet man att ett approximativt tal är korrekt avkortat, dvs.

att den gällande siffran är höjd, om den följande siffran är 5 eller däröver, är talet riktigt på ½ enhet i sista *gällande* siffran.)

Då vi inte får talvärdet av en storhet genom omedelbar uppmätning, utan som resultat av en uträkning med ett eller flera direkt observerade värden, beräknar man felet i resultatet. Hur en sådan felberäkning utförs, när det gäller de fyra enkla räknesätten, visas genom följande exempel.

3.1 Addition

Exempel 1. En triangels sidor uppmättes på 1 mm när till 225, 198 och 310 mm. Beräkna triangeln omkrets och mätfelet.

Omkretsen $=(225\pm1)+(198\pm1)+(310\pm1)=(733\pm3)$ mm. Då man frågar efter felgränsen får vi tänka oss att alla mätetalen är för små eller för stora, dvs. omkretsen ligger någonstans mellan 730 och 736 mm.

3.2 Subtraktion

Exempel 2. Temperaturen ändras från $(17,0\pm0,1)$ till $(99,6\pm0,5)\,^{\circ}$C. Ange temperaturstegringen och mätfelet.

Temperaturstegringen $=(99,6\pm0,5)-(17,0\pm0,1)=(82,6\pm0,6)\,^{\circ}$C. För att få felgränsen tänker vi oss att värdet på den ena mätningen är för hög och den andra är för låg, dvs. att temperaturstegringen ligger någonstans mellan 83,2 och 82,0 $^{\circ}$C.

3.3 Multiplikation

Exempel 3. En rektangels sidor är $(20,5\pm0,2)$ och $(50,0\pm0,4)$ mm. Sök rektangelns area (ytans storlek) och mätfelet.

Felen i sidorna är 1,0 % respektive 0,8 %. Om vi till en början antager att mätetalen på sidorna är för långa kan arean uppgå till

$$20,5\left(1+\frac{1,0}{100}\right)\cdot 50,0\left(1+\frac{0,8}{100}\right)\rightarrow\ 1025,0\left(1+\frac{1,0}{100}+\frac{0,8}{100}+\frac{1,0\cdot 0,8}{10000}\right)\rightarrow$$

$$\rightarrow 1025,0\left(1+\frac{1,8}{100}+\cancel{\frac{0,8}{10000}}\right)\rightarrow{}^{1}\approx 1025,0\left(1+\frac{1,8}{100}\right)\text{ mm}^2.$$

Analogt om mätetalen är för korta får vi $=1025,0\left(1-\dfrac{1,8}{100}\right)\approx 1025-18\ \text{mm}^2$ eller sammantaget

$=1025,0\left(1\pm\dfrac{1,8}{100}\right)\approx 1025\pm18\ \text{mm}^2$, med andra ord areans storlek ligger någonstans mellan 1007 och 1043 mm^2.

[1] Den sista termen i parentesen är så liten i förhållande till de övriga, att den kan försummas.

3.4 Division

Exempel 4. En kropp väger $(50,2 \pm 0,1)$ g och har volymen $(75,4 \pm 0,3)$ cm^3 (felet i % $= \left(\pm \frac{0.3}{75.4} \right) \cdot 100 \approx \pm 0.4$) Bestäm kroppens täthet och mätfelet. – Tätheten får vi genom att, man dividerar kroppens vikt med dess volym. För att få det högsta värdet var till tätheten kan uppnå, antager vi att vägningen ger för lågt resultat och volymberäkningen för högt. Det övre gränsvärdet blir då.[2]

$$\frac{50,2\left(1+\frac{0,2}{100}\right)}{75,4\left(1-\frac{0,4}{100}\right)} = \frac{50,2\left(1+\frac{0,2}{100}\right)\left(1+\frac{0,4}{100}\right)}{75,4\left(1-\frac{0,4}{100}\right)\left(1+\frac{0,4}{100}\right)} = \frac{50,2\left(1+\frac{0,2}{100}+\frac{0,4}{100}+\cancel{\frac{0,08}{10000}}\right)}{75,4\left(1-\cancel{\frac{0,16}{10000}}\right)} =$$

[3] $$\approx \frac{0,666\left(1+\frac{0,2+0,4}{100}\right)}{1} \approx 0,666+0,004$$

På motsvarande sätt får vi det undre gränsvärdet till $0,666-0,004$.

Vi kan skriva tätheten till $=(0,666 \pm 0,004)$ g/cm^3.

3.5 Beräkningsregel

Av de anförda exemplen kan man vid felberäkning tillämpa följande regler:

1. *Vid addition och subtraktion (termer)* ***adderar*** *man felen*
2. *Vid multiplikation och division (faktorer)* ***adderar*** *man de* ***procentuella*** *felen.*

Exempel 5. För att bestämma volymen av en cylinder uppmätte man med skjutmått diametern *d* och höjden *h*, se tabell 2:

Mätning nr	***d*** **cm**	***h*** **cm**
1	4,99	2,52
2	5,02	2,51
3	5,00	2,52
4	4,99	2,53
5	5,00	2,52
Medelv.	5,00	2,52
Max fel	0,02	0,01
Fel%	0,4	0,4

Tabell 2. Cylinder *mätvärden*

Volymen v är då $\frac{\pi d^2}{4}$ gånger höjden *h*. Alltså: $v = \frac{\pi d^2 h}{4} \approx \frac{3.14 \cdot 5.00^2 \cdot 2.52}{4} \approx 49.5 \text{ cm}^2$.

[2] Vi förlänger bråket med uttrycket i nämnarens parantes, men med omvänt tecken, för att kunna tillämpa konjugatregeln i nämnaren.

[3] Tredje termen i täl**jaren** och andra termen i nämnaren är försumbara.

Då $d^2 = d * d$ adderar vi här de procentuella felen $= 0,8$. Felet i π blir vid användning av närmevärdet 3,14 så litet som 0,03 %, som här försummas. Felet blir alltså $0,4 + 0,4 + 0,4 = 1,2\%$ av 49,5 som är $\approx 0,6$ cm^3.

Svar: $v = (49,5 \pm 0,6)$ cm^3.

Exempel 6. Beräkna $\sqrt{4+\sqrt{2}}$, ett ***dubbelt irrationellt uttryck***[4], och ange resultatet med fem decimaler samt ange felets storlek:

Vi får $\sqrt{4+\sqrt{2}} = \sqrt{5.4142} = 0.1 \cdot \sqrt{541.42} = 0.1 \cdot 23.2685 = 2.32685.$

I detta resultat har vi ett fel på 0,0001 eller $0.002\,\%$ i 5,4142 **(= *a*).** Då $\sqrt{a} \cdot \sqrt{a} = a$, följer av felberäkningsregeln, att proc. felet i $\sqrt{a}$ är hälften av det proc. felet i *a*, alltså 0,001 % av 2,32685 eller 0,00002. Tillkommer ett fel på 1 enhet i sista siffran vid den 2;a rotutdragningen p.g.a. att det beräknade resultatet inte är den exakta kvadratroten ur *a*.

Svar: $\because \sqrt{4+\sqrt{2}} = 2.32685 \pm 0.00003$

3.6 Hjärngymnastik

Myrans gång

Du har en stor tändsticksask $4 \cdot 8 \cdot 2$ cm.

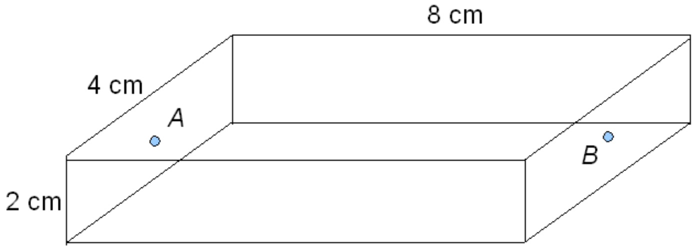


Bild 8. *Myrans ask*

En myra befinner sig på insidan av asken vid *A* och går den kortaste vägen från *A* till *B* och åter till *A*. Myran måste passera samtliga sex sidor på sin väg. *A* och *B* ligger i mitten på var sin kortända.

- Hur lång sträcka går myran?

[4] Vissa uttryck av detta slag kan reduceras till enkla irrationella dito, men här går vi inte in på detta.

Räkna med kvadratrötter

Ett tal, vars kvadrat är a, sägs vara kvadratrot ur a. Så är t.ex. 5 kvadratroten ur 25, eftersom $5^2 = 25$. Men då även $(-5)^2 = 25$, så är även -5 kvadratrot ur 25. Den *positiva* kvadratroten ur a[1] tecknas med användande av *rotmärke* $\sqrt{a}$. Vill man ange båda rötterna skriver man $\pm\sqrt{a}$.

Ex1. Vad är $\sqrt{3600}, \sqrt{0,0016}, \sqrt{\frac{4}{9}}, \sqrt{2\frac{2}{49}}, \sqrt{931225}, \sqrt{34,81}, \sqrt{0,014161}$?

I föregående exempel utgör talen under rotmärkena jämna kvadrater och dess kvadratrötter är *rationella* tal, som kommer av att de kan skrivas som kvoten (lat. *ratio*) mellan två hela tal *m* och *n*, alltså under formen $\frac{m}{n}$. Ett rationellt tal kan också skrivas som ett oändligt periodiskt decimalbråk. Ex. $\frac{2}{3} = 0,66666\ ....$, $\frac{16}{11} = 1,454545\ .....$, $\frac{2}{5} = 0,40000\ ....$ (perioden kan även utgöras av nollor).

Kvadratroten ur ett tal, som inte är en jämn kvadrat, t.ex. $\sqrt{2}$, är ett *irrationellt* (icke rationellt) tal. Kunde $\sqrt{2}$ skrivas under formen $\frac{m}{n}$, som vi antager är förkortat så långt som möjligt, (att *n* inte kan vara = 1, d.v.s. $\sqrt{2}$ är ett helt tal inses omedelbart) skulle $\frac{m^2}{n^2}$, som då inte heller kan förkortas, vara lika med det hela talet 2 som är omöjligt. Vi kan dock bilda ett oändligt *icke-periodiskt* decimalbråk, sådant, att ju fler decimaler som medtages, desto mer närmar sig dess kvadrat värdet av 2. Heltalssiffran är tydligen 1 och den första decimalen 4, då $1,4^2 < 2$ men $1,5^2 > 2$. Efter samma princip erhåller man de följande decimalerna och det så bilade decimalbråket är just $\sqrt{2}$. Man får:
$\sqrt{2} = 1,414213562\ .....$
När vi i en praktisk uppgift räknar med ett irrationellt tal, använder vi ett *approximativt värde* (*närmevärde*), som vi får genom att man avbryter det oändliga decimalbråket vid någon viss decimal, allt efter den noggrannhet, uppgiften kräver. Sätter vi 1,4142 för $\sqrt{2}$, är felet mindre än 1 i sista decimalen. Man säger, att man angivet $\sqrt{2}$ på 0,0001 när.

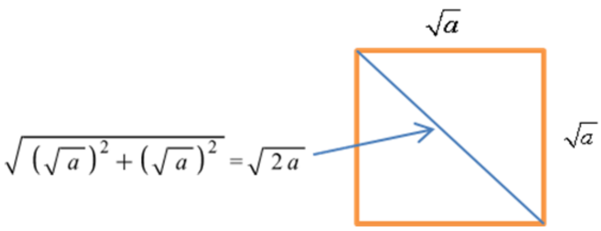


Bild 9. *Kvadrat med arean **a** - diagonalens längd*

$\sqrt{a}$ utgör mätetalet för sidan i en kvadrat, vars areas mätetal är *a* (längd och area, som vanligtvis uttryckes i motsvarande enheter, t.ex. i cm och cm^2). Uppritas en rätvinklig triangel med vardera kateten = 1 längdenhet är, enligt Pytagoras sats, kvadraten på hypotenusan

[1] Här och i det följande av detta kap. betecknar en bokstav ett *pos.* tal.

2 area enheter och alltså hypotenusan $\sqrt{2}$ längdenheter. Är kateterna 1 respektive $\sqrt{2}$ längd enheter, blir hypotenusan $\sqrt{3}$ längdenheter, osv. Det finns även andra irrationella tal än vissa kvadratrötter; vi kan nämna som exempel talet $\pi = 3,\ 141592654$ .... ,[2] som utgör mätetalet för omkretsen hos en cirkel med diametern = 1 längdenhet. Är diametern *d* längdenheter, blir omkretsen $\pi \cdot d$ längdenheter.

Ex2. Beräkna $\sqrt{860} - \sqrt{126} + \sqrt{756,7} - \sqrt{28}$. Ange felet med fyra decimaler.

Svar: $40,\ 3175 \pm 0,\ 0004$.

Räkneregler 1, multiplikationsformeln:

(4.1) $$\sqrt{a} \bullet \sqrt{b} = \sqrt{a \bullet b}$$

Bevis: Formelns båda led har lika stora kvadrater, då:

$$(\sqrt{a} \bullet \sqrt{b})^2 = (\sqrt{a})^2 \bullet (\sqrt{b})^2 = a\,b$$

och

$$(\sqrt{a\,b})^2 = a\,b\,;$$

Både höger- och västerleden är positiva och är därmed lika.

Enligt **(4.1)** blir $\sqrt{5} \cdot \sqrt{11} = \sqrt{55} = 7,\ 4162 \pm 0,\ 0001$

Då man i stället för *a* kan skriva $\sqrt{a^2}$, följer av **(4.1)**:

(4.1´) $$a \bullet \sqrt{b} = \sqrt{a^2 \bullet b}$$

En positiv faktor till en kvadratrot får flyttas in under rotmärket, om den kvadreras.

Beräkning av t.ex. $\sqrt{a^2}$ kan antingen göras som:

$$10\sqrt{7} = 10(2,\ 6458 \pm 0,\ 0001) = 26,\ 458 \pm 0,\ 001$$

eller helst som:

$$10\sqrt{7} = \sqrt{700} = 26,\ 4575 \pm 0,\ 0001$$

då resultatet nu blir noggrannare, om man tillämpar **(4.1')**.

skall t.ex. $\frac{1}{5}\sqrt{7}$ beräknas, sker däremot ingen inflyttning. (varför?)

Vi får:

$$\frac{1}{5}\sqrt{7} = \frac{1}{5}(2,\ 6458 \pm 0,\ 0001) = 0,\ 52915 \pm 0,\ 00002$$

[2] Se kap 1. Om våra tal.

Räkneregler 2:

Om man läser formel **(4.1´)** från höger till vänster, gäller, att:

En kvadratisk faktor får flyttas utanför rotmärket, om kvadratroten dras ur densamma.

Så t.ex. är $\sqrt{45} = \sqrt{3^2 \cdot 5} = 3\sqrt{5}$ och $\sqrt{\frac{5}{9}} = \frac{1}{3}\sqrt{5}$. Detta möjliggör ofta förenkling av ett uttryck som innehåller rotmärken.

Ex3. Förenkla och beräkna:

$$\sqrt{32} - 5\sqrt{98} + \sqrt{512} + \sqrt{1250}$$

Svar: $10\sqrt{2} = \sqrt{200} = 14,1421 \pm 0,0001$

Man kan ofta förlänga under rotmärket med ett lämpligt tal och därefter flytta ut kvadratiska faktorer från täljare eller nämnare.

Exempel 4. $\sqrt{\frac{2}{3}} = \sqrt{\frac{6}{9}} = \frac{1}{3}\sqrt{6}$; ***Exempel 5.*** $\sqrt{1\frac{7}{12}} = \sqrt{\frac{19\cdot 3}{12\cdot 3}} = \sqrt{\frac{57}{36}} = \frac{1}{6}\sqrt{57}$;

Exempel 6. $\sqrt{3,26} = \sqrt{\frac{326}{100}} = \frac{1}{10}\sqrt{326}$; ***Exempel 7.*** $\sqrt{0,039} = \sqrt{\frac{390}{10000}} = \frac{1}{100}\sqrt{390}$;

Exempel 8. $\sqrt{11,7} = \sqrt{\frac{947,7}{81}} = \frac{1}{9}\sqrt{947,7}$; ***Exempel 9.*** $\sqrt{2823} = \sqrt{\frac{2823\cdot 4}{4}} = 2\sqrt{705,75}$;

Om det förekommer rotmärken i ett bråks nämnare, bör man eliminera dessa före beräkningen (varför?).

Exempel 10. $\frac{3}{\sqrt{5}} = \frac{3\cdot\sqrt{5}}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{5}} = \frac{3}{5}\sqrt{5}$; *Exempel 11.* $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{28}} = \frac{\sqrt{3}\cdot\sqrt{7}}{\sqrt{28}\cdot\sqrt{7}} = \frac{1}{14}\sqrt{21}$;

Exempel 12. $\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{(\sqrt{3}+\sqrt{2})\cdot(\sqrt{3}-\sqrt{2})} = \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{(\sqrt{3})^2-(\sqrt{2})^2} = \sqrt{3}-\sqrt{2}$;

Exempel 13.

$$\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{3\sqrt{2}-2\sqrt{3}} = \frac{(\sqrt{3}-\sqrt{2})\cdot(3\sqrt{2}+2\sqrt{3})}{(3\sqrt{2}-2\sqrt{3})\cdot(3\sqrt{2}+2\sqrt{3})} =$$

$$= \frac{3\sqrt{6}+6-6-2\sqrt{6}}{(3\sqrt{2})^2-(2\sqrt{3})^2} = \frac{1}{6}\sqrt{6} \;;$$

Ex14. Eliminera rotmärkena i nämnaren och beräkna:

$$\frac{2}{1+\sqrt{2}-\sqrt{3}}$$ Ledning: Betrakta $(1+\sqrt{2})$ som ***en*** term.

Svar: $\frac{1}{2}(2+\sqrt{2}+\sqrt{6}) = 2,9318 \pm 0,0001$

Räkneregler 3:

Enligt formeln (**4.1**) är $\sqrt{b}\cdot\sqrt{\dfrac{a}{b}}=\sqrt{a}$; Divideras här båda leden med $\sqrt{b}$, erhåller man ***divisionsformeln* för kvadratrötter**:

(4.2) $$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a}{b}}$$

(Man bör lägga märke till, att någon motsvarighet inte gäller för kvadratrötters addition och subtraktion och att således $\sqrt{a}\pm\sqrt{b}$ *inte är lika med, d.v.s.* $\neq\sqrt{a\pm b}$ Visa det genom att kvadrera de båda uttrycken.

Ex15. Förenkla: $\sqrt{9\frac{1}{6}}:\sqrt{1\frac{5}{6}}$

Ex16. Förenkla: $\dfrac{\sqrt{2\frac{6}{17}}*\sqrt{3\frac{9}{14}}}{\sqrt{1\frac{3}{7}}}$

Ex17. Förenkla: $\left(\sqrt{\dfrac{a}{b}}-\sqrt{\dfrac{b}{a}}\right):\left(\sqrt{\dfrac{1}{b}}+\sqrt{\dfrac{1}{a}}\right)$

Ex18. Lös ekvationen: $x\sqrt{5}+\sqrt{5}=4-3x$

Ex19. Lös ekvationssystemet:

$$\begin{array}{l} (1) \\ (2) \end{array}\begin{cases} x+y=2\sqrt{3}+2\sqrt{2} \\ x\sqrt{2}-y\sqrt{3}=\sqrt{2}+\sqrt{3} \end{cases}$$

Svar: ***Ex15.*** $\sqrt{5}$; ***Ex16.*** $\sqrt{6}$; ***Ex17.*** $\sqrt{a}-\sqrt{b}$; ***Ex18.*** $x=\dfrac{17-7\sqrt{5}}{4}\approx 0.3368$

Ex19. $\begin{cases} x=2\sqrt{3}+1\approx 4.4641 \\ y=2\sqrt{2}-1\approx 1.8284 \end{cases}$

4.1 LÖSNINGSFÖRSLAG

Ex3: Efter utflyttning av kvadratiska faktorer och sammanslagning av termer får vi resultatet:

$$\sqrt{32} - 5\sqrt{98} + \sqrt{512} + \sqrt{1250} = 4\sqrt{2} - 35\sqrt{2} + 16\sqrt{2} + 25\sqrt{2} + 25\sqrt{2} =$$

$$= (4 - 35 + 16 + 25)\sqrt{2} = 10\sqrt{2} = \sqrt{200} \approx 14.1421$$

Ex14:

$$\frac{2}{1+\sqrt{2}-\sqrt{3}} = \frac{2\left[\left(1+\sqrt{2}\right)+\sqrt{3}\right]}{\left[\left(1+\sqrt{2}\right)-\sqrt{3}\right]\cdot\left[\left(1+\sqrt{2}\right)+\sqrt{3}\right]} = \frac{2+2\sqrt{2}+2\sqrt{3}}{\left(1+\sqrt{2}\right)^2-3} =$$

$$= \frac{2\left(1+\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)}{1+2\sqrt{2}+2-3} = \frac{2\left(1+\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)\cdot\sqrt{2}}{2\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}} = \frac{2+\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2} = \frac{1}{2}\left(2+\sqrt{2}+\sqrt{6}\right) =$$

$$= 1 + \frac{1,4141 \pm 0,0001}{2} + \frac{2,4495 \pm 0,0001}{2} =$$

$$= 1 + \frac{1.4141 \pm 0.0001}{2} + \frac{2.4495 \pm 0.001}{2} = 1 + 0.7071 \pm 0.00005 + 1.2247 \pm 0.00005 =$$

$$= 2.9318 \pm 0.0001$$

Ex15. $$\sqrt{9\frac{1}{6}} : \sqrt{1\frac{5}{6}} = \sqrt{\frac{55}{6}} : \sqrt{\frac{11}{6}} = \sqrt{\frac{55*6}{6*11}} = \sqrt{5}$$

Ex16. $$\frac{\sqrt{2\frac{6}{17}} * \sqrt{3\frac{9}{14}}}{\sqrt{1\frac{3}{7}}} = \frac{\sqrt{\frac{40}{17}} * \sqrt{\frac{51}{14}}}{\sqrt{\frac{10}{7}}} = \frac{\sqrt{\frac{40*51}{17*14}}}{\sqrt{\frac{10}{7}}} = \sqrt{\frac{40*51*7}{17*14*10}} = \sqrt{\frac{4*3}{2}} = \sqrt{6}$$

Ex17. $$\left(\sqrt{\frac{a}{b}} - \sqrt{\frac{b}{a}}\right)\left(\sqrt{\frac{1}{b}} + \sqrt{\frac{1}{a}}\right) = \left(\frac{\sqrt{a^2} - \sqrt{b^2}}{\sqrt{ab}}\right)\left(\frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{\sqrt{ab}}\right) =$$

$$= \left(\frac{\cancel{\sqrt{ab}}\cdot\cancel{\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)}\cdot\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)}{\cancel{\sqrt{ab}}\cdot\cancel{\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)}}\right) = \left(\sqrt{a} - \sqrt{b}\right)$$

Ekvationer av andra och högre grad

Hur stor är sidan i en kvadrat, vars yta är 25 cm^2? Antar vi att sidan är x cm, leder uppgiften till ekvationen $x^2 = 25$. Denna ekvation satisfieras av x-värdena +5 och -5 vilka utgör rötter till ekvationen. Som svar på frågan duger dock endast den positiva roten.[1] Kvadratens sida är 5 cm.

Exempel 1. I en rätvinklig triangel är hypotenusan 6 m och den ena kateten dubbelt så stor som den andra. Sök kateterna.

Antag att den mindre kateten är x m och den större $2x$ m, får vi enligt Pytagoras sats $x^2 + 4x^2 = 36$

eller $5x^2 = 36 \rightarrow x^2 = \frac{36}{5} \rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{36}{5}} \rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{36*5}{5*5}} \rightarrow x = \pm\frac{6}{5}\sqrt{5}$

Den mindre kateten är $\frac{6}{5}\sqrt{5} \approx 2.6833$ m och den större $\frac{12}{5}\sqrt{5} \approx 5.3666$ m.

Bestäm rötterna till ekvationerna:

Ex2. $\frac{3x}{5} = \frac{5}{3x}$ *Svar:* $x_1 = 1\frac{2}{3} \ldots x_2 = -1\frac{2}{3}$

Ex3. $\frac{x-2}{x-1} + \frac{x+2}{x+1} = 1$ *Svar:* $x_1 = \sqrt{3} \ldots x_2 = -\sqrt{3}$

Ex4. $ax^2 + b^2 = a^2 + bx^2$ *Svar:* $x_1 = \sqrt{a+b} \ldots x_2 = -\sqrt{a+b}$

Av ekvationen $(x + 3)^2 = 16$ följer $x + 3 = \pm 4$, varav $x = -3 \pm 4$ som ger rötterna $x_1 = 1$ och $x_2 = -7$. (pröva detta!)

Utvecklas kvadraten, får ekvationen formen $x^2 + 6x + 9 = 16$ eller $x^2 + 6x = 7$.
Föreligger ekvationen från början under den senare formen, löser man den genom att till båda leden addera 9, varefter den kan skrivas under den första formen. Rötterna får vi sedan på angivet sätt.

Exempel 5. Lös ekvationen $x^2 - 8x = -12$
Addera 16 till båda leden.

$$x^2 - 8x = -12 \rightarrow x^2 - 8x + 16 = 16 - 12 \rightarrow (x-4)^2 = 4 \rightarrow x - 4 = \pm 2 \rightarrow x_1 = 6 \ldots x_2 = 2$$

Exempel 6. Lös ekvationen $x^2 + 3x + 2 = 0$

Flytta över den bekanta termen till högra ledet och addera $\frac{9}{4}$ till båda leden. Då får vi

$$x^2 + 3x + 2 = 0 \rightarrow x^2 + 3x + \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \left(\frac{3}{2}\right)^2 - 2 \rightarrow \left(x + \frac{3}{2}\right)^2 = \left(\frac{3}{2}\right)^2 - 2 \rightarrow x + \frac{3}{2} = \pm\sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 - 2} \rightarrow$$

$$\rightarrow x = -\frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9-8}{4}} \rightarrow x = -\frac{3}{2} \pm \frac{1}{2} \rightarrow x_1 = -1 \ldots x_2 = -2.$$

[1] Fysiska sträckor är ***alltid*** **positiva**.

Ex7. Lös ekvationen $2x^2 - 5x + 3 = 0$ – Ledning: Dividera ekvationen med 2.

Svar: $x_1 = 1\frac{1}{2} \ldots x_2 = 1$

Ex8. $x^2 + 1 = 4x$

Svar: $x_1 = 2 + \sqrt{3} \ldots x_2 = 2 - \sqrt{3}$

Ex9. I en rektangel är den ena sidan 5 cm längre än den andra. Arean är 176 cm^2. Beräkna sidorna.

Svar: $x_1 = 11 \ldots x_2 = 16$ cm

De ekvationer som förekommit här kan skrivas som:

(5.1) $$x^2 + px = q$$

som vi kallar *2:a grads ekvationens normalform.*

I (**5.1**) kan ***p***: ***koefficienten*** för ***x*** och ***q***: ***den bekanta termen*** – ha godtyckliga positiva och negativa värden, såväl som 0. Är ***p*** **= 0** (d.v.s. saknas *x*-termen), sägs 2:a grads ekvationen vara ***ofullständig***.

För att lösa (**5.1**) gör vi, som i exemplen ovan, vänstra ledet till en jämn kvadrat genom att addera $\left(\frac{p}{2}\right)^2$ till båda leden.

$$x^2 + px + \left(\frac{p}{2}\right)^2 = \left(\frac{p}{2}\right)^2 + q \to \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 = \left(\frac{p}{2}\right)^2 + q \to x + \frac{p}{2} = \pm\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 + q} \to$$

(5.2) $$x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 + q}$$

Det är onödigt att för varje gång, vi skall lösa en 2:a grads ekvation, göra om denna räkning. Vi kan sedan ekvationen givits formen **(5.1)**, direkt skriva upp rötterna, som enligt (**5.2**) som är:

Halva koefficienten för x (p) med ombytt tecken $\pm$ kvadratroten ur denna halva koefficient i kvadrat ökad med värdet av högra ledet (q).

Exempel 10. Lös ekvationen $\frac{5}{x-8} - \frac{15}{x+2} + \frac{7}{x} = 0$

Hyfsas ekvationen så att den ges formen **(5.1)**, för vi:

$$\frac{5}{x-8} - \frac{15}{x+2} + \frac{7}{x} = 0 \to (x-8)(x+2)x\left(\left(\frac{5}{x-8}\right) - \left(\frac{15}{x+2}\right) + \frac{7}{x}\right) = 0 \to$$

$\to -3x^2 + 88x - 112 = 0 \to x^2 - \frac{88}{3}x = -\frac{112}{3} \to$ Enligt (**5.2**) blir då

$$\to x=\frac{44}{3}\pm\sqrt{\left(\frac{44}{3}\right)^2-\frac{112}{3}}\to x=\frac{44}{3}\pm\sqrt{\frac{1936-3*112}{9}}\to x=\frac{44}{3}\pm\frac{40}{3}\to x_1=28\ldots x_2=1\frac{1}{3}$$

Exempel 11. En person simmar 100 m uppför en ström och tillbaka igen på 5 min och 20 sek. Vilken hastighet i stillastående vatten motsvarar detta, om strömmens hastighet var 10 m/sek.?

Antag att den sökta hastigheten är *x* m/sek. får vi

$$\frac{100}{x-10}+\frac{100}{x+10}=5\frac{1}{3}\to 100(x+10)+100(x-10)=5\frac{1}{3}(x-10)(x+10)\to$$

$$\to 100x+1000+100x-1000=\frac{16}{3}\left(x^2-100\right)\to 200x=\frac{16}{3}x^2-\frac{1600}{3}\to\frac{16}{3}x^2-200x=\frac{1600}{3}\to$$

$$\to x^2-\frac{600}{16}x=100\to x=\frac{75}{4}\pm\sqrt{\frac{5625+1600}{16}}\to x=\frac{75}{4}\pm\frac{85}{4}\to x_1=40 \text{ m/min.}$$

Den negativa roten satisfierar visserligen ekvationen men inte problemet och förkastas därför.

Exempel 12. Ett markområde i form av en rektangel med sidorna 20 och 28 m skall innehålla en gräsplan på 4 ar (1 ar $=10*10\,\text{m}^2$) omgiven av en på alla sidor lika bred väg. Sök vägens bredd.

Vi antager vägens bredd till *x* m.

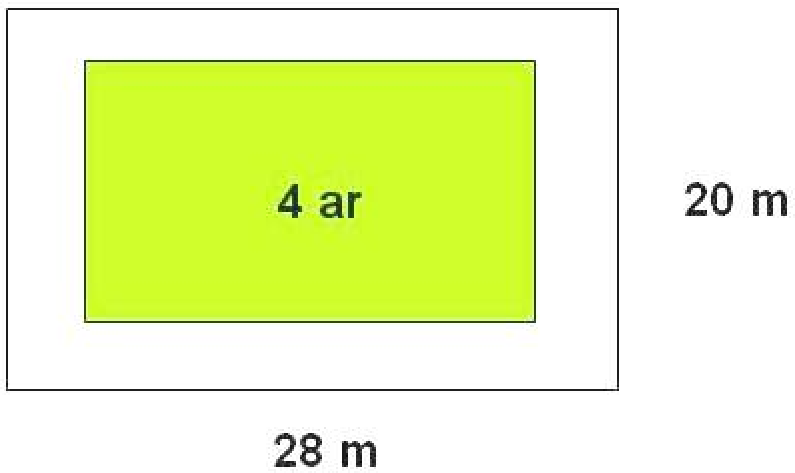


Bild 11. *Gräsplan omgärdad av en väg*

$$28\cdot 2x+(20-2x)\cdot 2x+400=20\cdot 28\to\ 56x+40x-4x^2+400=560\to$$

$$x^2-24x=-40\to x=12\pm\sqrt{144-40}\to x=12\pm 2\sqrt{26}\to x_1=12-2\sqrt{26}\approx 1,802 \text{ m.}$$

Varför duger inte den andra roten som svar på problemet? $x_2=12+2\sqrt{26}\approx 22,198$ m?

Exempel 13. En rektangels omkrets är 32 cm och arean 68 cm^2. Beräkna sidorna. Är den ena sidan *x* cm, blir den andra (16-*x)* cm. Vi får då: $x\cdot(16-x)=68\to x^2-16x=-68\to$

$$\to x=8\pm\sqrt{64-68}\to x=8\pm\sqrt{-4}$$ (två imaginära rötter).

I x ingår här kvadratroten ur ett negativt tal. Då det tydligen inte finns något vare sig rationellt eller irrationellt tal, vars kvadrat är negativ, kan vi dra slutsatsen, att någon sådan rektangel inte existerar, som vi förutsatte i uppgiften.

Ekvationen i föregående exempel saknar rötter, om vi endast räknar med ***reella***, d.v.s. rationella och irrationella, tal. Emellertid har det för matematiken och dess tillämpningar visat sig ändamålsenligt att utvidga talsystemet till att omfatta även sådana storheter t.ex. $\sqrt{-4}$ vilkas kvadrater är negativa, d.v.s. de komplexa (imaginära) talen. Innefattar vi i denna benämning även tal som $8+\sqrt{-4}$ och $8-\sqrt{-4}$, d.v.s. komplexa tal, vilka består av en reell och en imaginär term, kan vi säga, att ekvationen i föregående exempel (i likhet med förut behandlade 2:a graders ekvationer) har två rötter, fast de är imaginära och därmed ligger utanför tallinjen. Ekvationen $x=8\pm\sqrt{-4}$ kan skrivas som $8\pm 2i$ där $i=\sqrt{-1}$, eller normalformen $x=a\pm bi$.

När vid lösningen av en 2:a grads ekvation enligt **(5.2)** uttrycket under rotmärket blir negativt, har ekvationen tydligen två imaginära rötter. Medräknar vi imaginära rötter och dessutom kommer överens om att 2:a grads ekvation har två lika rötter (båda av värdet $-\frac{p}{2}$), när uttrycket under rotmärket är 0, gäller alltid, att en *2:a grads ekvation har två rötter*, vilka är:

- båda reella och olika
- båda reella och lika eller
- båda imaginära

Exempel 14. Lös ekvationen $2-4x+3x^2=0$

Ekvationen blir i normalform $x^2-\frac{4x}{3}=-\frac{2}{3}$, varav

$$x=\frac{2}{3}\pm\sqrt{\frac{4-6}{9}}\rightarrow x=\frac{2}{3}\pm\frac{\sqrt{2}}{3}i\rightarrow x_1=\frac{2}{3}+\frac{\sqrt{2}}{3}i\ldots x_2=\frac{2}{3}-\frac{\sqrt{2}}{3}i$$ (två imaginära rötter).

Exempel 15. Lös ekvationen $6-2x=\frac{9}{2x}$. I normalform blir ekvationen

$$x^2-3x=-\frac{9}{4}\rightarrow x=\frac{3}{2}\pm\sqrt{\frac{9}{4}-\frac{9}{4}}\rightarrow x=\frac{3}{2}\pm 0\rightarrow x_1=\frac{3}{2}\ldots x_2=\frac{3}{2}$$ (två lika rötter).

Ex16. Undersök för vilka värden på q i ekvationen $x^2-4x=q$ har sina rötter:

a) reella och olika, *Svar:* $q > -4$

b) reella och lika, *Svar:* $q = -4$

c) imaginära. *Svar:* $q < -4$

Ex17. Lös ekvationen $\frac{x-\sqrt{3}}{x+\sqrt{3}}-\frac{x+\sqrt{3}}{x-\sqrt{3}}+2\frac{2}{3}=0$ Svar: $\rightarrow x_1=2\sqrt{3}\ldots x_2=-\frac{1}{2}\sqrt{3}$

Ekvationssystem av andra och högre grad

Har vi ett system av lika många ekvationer som det finns obekanta och därmed alla ekvationerna är av 1:a graden utom en, som är av högst 2:a graden, kan vi alltid lösa systemet (d.v.s. bestämma alla sammanhörande värden på de obekanta, ***rotsystem***, vilka satisfierar samtliga ekvationer).

För lösningen kan ***substitutmetoden*** användas, i det man med hjälp av 1:a grads ekvationer uttrycker alla obekanta utom en i den återstående obekant samt insätter de erhållna uttrycken i 2:a grads ekvation, som då kommer att innehålla endast en obekant och kan lösas. Vi tillämpar metoden på systemet

Ex 40.
$$\begin{cases} x-y+z=0 \\ 2x-y-z=0 \\ x^2+y^2-5z^2=8 \end{cases}$$

i det vi löser ut t.ex. *x* ur den första ekvationen och får $x=y-z$. Vi sätter nu detta uttryck för *x* i den andra ekvationen som ger $y=3z$ som sätts in i den första ekvationen som ger $x=2z$. Dessa uttryck för *x* och *y* sätter vi nu in i den tredje ekvationen och vi får

$$(2z)^2+(3z)^2-5z^2=8 \rightarrow 4z^2+9z^2-5z^2=8 \rightarrow$$
$$\rightarrow 8z^2=8 \rightarrow z^2=1 \rightarrow z=\pm\sqrt{1} \rightarrow z_1=1 \ldots z_2=-1$$

Som lösning till ekvationssystemet får vi de båda ekvationssystemen

$$\begin{cases} x=2 \\ y=3 \\ z=1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x=-2 \\ y=-3 \\ z=-1 \end{cases};$$

Ex 41. Lös ekvationssystemen

a) $\begin{cases} x+y=10 \\ xy=16 \end{cases}$ b) $\begin{cases} \dfrac{3x-2}{y+5}=2-\dfrac{y}{x} \\ x-y=4 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x+3z=0 \\ 2x-3y+9z=3 \\ (x-z)(y-2z)=8 \end{cases}$

Svar:

a) $\begin{cases} x_1=2 \\ y_1=8 \end{cases} \begin{cases} x_2=8 \\ y_2=2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x_1=4 \\ y_1=0 \end{cases} \begin{cases} x_2=-0.5 \\ y_2=-4.5 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x_1=-3 \\ y_1=0 \\ z_1=1 \end{cases} \begin{cases} x_2=6 \\ y_2=-3 \\ z_2=-2 \end{cases};$

Om en ekvation är av högre grad än den 2:a och de övriga ekvationerna är av 1:a graden samt om mer än en ekvation är av 2:a graden eller däröver, kan vi i allmänhet inte lösa systemet. (slutekvationens grundtal, och därmed antalet rotsystem, är i allmänhet produkten av de givna ekvationernas grundtal men kan vara mindre.) Vissa dylika system kan vi dock lösa. Så kan systemen i följande exempel lösas med substitutionsmetoden.

Ex 42. a) $\begin{cases} x-y=3 \\ x^3-y^3=9 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x^2+y^2=13 \\ xy=6 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x+y=5z \\ x-y=2z \\ x^3+y^3=185z \end{cases}$

Svar: a) $\begin{cases} x_1 = 2 \\ y_1 = -1 \end{cases}$ $\begin{cases} x_2 = 1 \\ y_2 = -2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x_1 = 3 \\ y_1 = 2 \end{cases}$ $\begin{cases} x_2 = -3 \\ y_2 = -2 \end{cases}$ $\begin{cases} x_3 = 2 \\ y_3 = 3 \end{cases}$ $\begin{cases} x_4 = -2 \\ y_4 = -3 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x_1 = 0 \\ y_1 = 0 \\ z_1 = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x_2 = 7 \\ y_2 = 3 \\ z_2 = 2 \end{cases}$ $\begin{cases} x_3 = -7 \\ y_3 = -3 \\ z_3 = -2 \end{cases}$;

I ekvationssystemet

Exempel 43. $\begin{cases} x^2 - 1.5xy = y^2 \\ y^2 + xy - y = 4 \end{cases}$

är den första ekvationen homogen. Ur denna ekv. kan då $\dfrac{x}{y}$ beräknas och man får $\left(\dfrac{x}{y}\right)_1 = 2$ och $\left(\dfrac{x}{y}\right)_2 = -\dfrac{1}{2}$. Ekvationssystemet kan nu ersättas med två enklare system

$$\begin{cases} y^2 + xy - y = 4 \\ \dfrac{x}{y} = 2 \end{cases} \quad \text{och} \quad \begin{cases} y^2 + xy - y = 4 \\ \dfrac{x}{y} = -\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

vilka lätt löses och ger rotsystemen

$$\begin{cases} x_1 = 2\frac{2}{3} \\ y_1 = 1\frac{1}{3} \end{cases} \begin{cases} x_2 = -2 \\ y_2 = -1 \end{cases} \begin{cases} x_3 = -2 \\ y_3 = 4 \end{cases} \begin{cases} x_4 = 1 \\ y_4 = -2 \end{cases} ;$$

I följande exempel kan man genom att dividera de i ett system ingående ekvationerna med varandra, skaffa sig en homogen ekvation, som kombineras med en av systemets ekvationer, varefter lösningen sker såsom i nyss anförda systemet.

Ex 44. a) $\begin{cases} x^2 + xy = 40 \\ y^2 - xy = 12 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 4y^2 - 3xy = 4x \\ 1{,}25y^2 + 3xy = 2x + 3y \end{cases}$ c) $\begin{cases} x^2y - x^3 = 96 \\ y^3 + x^2y = 40 \end{cases}$

Svar: a) $\begin{cases} x_1 = 4 \\ y_1 = 6 \end{cases}$ $\begin{cases} x_2 = -4 \\ y_2 = -6 \end{cases}$ $\begin{cases} x_3 = 5\sqrt{2} \\ y_3 = -\sqrt{2} \end{cases}$ $\begin{cases} x_4 = -5\sqrt{2} \\ y_4 = \sqrt{2} \end{cases}$

b) $\begin{cases} x_1 = 0 \\ y_1 = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x_2 = \dfrac{8}{9} \\ y_2 = \dfrac{4}{3} \end{cases}$ $\begin{cases} x_3 = \dfrac{4}{7} \\ y_3 = -\dfrac{4}{7} \end{cases}$ c) $\begin{cases} x_1 = -4 \\ y_1 = 2 \end{cases}$ övriga imaginära ;
– ”-

Om digniteter och rötter i allmänhet

En kub med kantlinjen 2 cm har volymen $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$ cm^3. Produkten $2 \cdot 2 \cdot 2$ skrivs kortare 2^3.

I allmänhet: *Produkten* $a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \, . \, . \, . \, a$ av n *faktorer a, tecknas* a^n (*utläses: a upphöjt till n*) *och sägs utgöra* a : *s* n : *e dignitet*. Talet a kallas dignitetens *bas* och n dess *exponent*. Av geometriska skäl använder man för 2:a digniteten a^2 och 3:e digniteten a^3 även benämningen kvadraten respektive kuben på a (a^4 kallas stundom bikvadraten på a).

Då $a^n \cdot a^m$ utgör produkten av $(n + m)$ faktorer av a och alltså kan skrivas a^{n+m}, får vi räknelagen:

Potenslagarna

(I) $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$. ***Exponenterna adderas.***

Regeln om exponenternas addition gäller på samma sätt en produkt av fler än två digniteter med samma bas.

Enligt **I** är $a^m \cdot a^{n-m} = a^n$ (om $n > m$), varav man genom division med a^m får räknelagen:

(II) $\dfrac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$. ***Exponenterna subtraheras.***

Vad blir $\dfrac{a^n}{a^m}$, om $n < m$ samt om $n = m$?

Då $\left(a^n\right)^m$ är en produkt av m stycken faktorer a^n, får vi enligt **I** räknelagen:

(III) $\left(a^n\right)^m = a^{n \cdot m}$. ***Exponenterna multipliceras.***

För multiplikation och division av digniteter med **samma** *exponent* men **olika** *bas* följer två räknelagar:

(IV) $a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$.

(V) $\dfrac{a^n}{b^n} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^n$.

Märk, att någon motsvarande enkel regel inte gäller vid addition och subtraktion.

Vad är $(a + b)^3$ och $(a - b)^3$?

Ex 52. *Förenkla* $\left(\frac{9\,a^2 b^3}{2\,x\,y^3}\right)^2 \cdot \left(\frac{2\,a\,x^3 y^2}{3\,b^2}\right)^3$

Svar: $6\cdot(a\cdot x)^7$

Kantlinjen hos en kub med volymen 8 cm^3 är 2 cm, då $2^3 = 8$. Talet 2, vars 3:e dignitet (kub) är 8, sägs vara 3:e rot (kubikrot) ur 8 och satisfierar ekvationen $x^3 = 8$.

Ex.Va 1. Denna 3:e grads ekvation har, utom den reella roten 2, två komplexa (imaginära) rötter. Visa detta!

För den reella 3:e roten (**kubikroten**) ur 8 används beteckningen $\sqrt[3]{8}$, där 3:an kallas **rotindex**. Ekvationen $x^3 = -8$ ger oss 3:e rötterna (kubikrötterna) ur – 8.

Ex Va 2. Av dessa är endast – 2 reell Visa detta! Vi skriver: $\sqrt[3]{-8} = -2$

Ett tal vars n:e dignitet är a, sägs vara n:e rot ur a och satisfierar ekvationen $\boldsymbol{x^n = a}$. Det finns alltid *n* stycken, reella eller imaginära, n:e rötter ur *a*.

Ex 53. *Bestäm 4:e rötterna ur* a) 1; b) -1; c) 16; d) -16; e) 4; f) -4.

Svar: a) 1, -1, två imaginära; b) alla fyra imaginära.; c) 2, -2, två imaginära; d) , fyra imaginära,

e) $\sqrt{2}$, $-\sqrt{2}$, två imaginära; f) fyra imaginära;

Av exemplet framgår, att det finns två reella 4:e rötter ur *a*, om *a* är positivt (tecknas $\sqrt[4]{a}$), och den andra numeriskt lika stor men negativa (tecknas $-\sqrt[4]{a}$). Är *a* neg., är alla 4:e rötterna ur *a* imaginära

Beträffande rötter i allmänhet gäller:

1) Är *rotindex n* ett *udda* tal, finns alltid en och bara en reell *n*:e rot ur *a*. Den har samma tecken som *a* och skrivs $\sqrt[n]{a}$. Vi får då $\sqrt[n]{-a} = -\sqrt[n]{a}$ (ex: $\sqrt[3]{-8} = -2 = -\sqrt[3]{8}$).
2) Är *rotindex n* ett *jämnt* tal, finns det två reella *n*:e rötter ur *a*, om *a* är positivt och tecknas $\sqrt[n]{a}$, den andra numeriskt lika stor men negativa tecknas $-\sqrt[n]{a}$ (för *n* = 2 utsätts inte rotindex).
Om *a* är neg., finns ingen reell *n*:e rot ur *a*.
Man kan säga, att rotutdragningen och dignitetsupphöjningen är omvända räknesätt, då det enligt definitionen på *n*:e rot gäller, att $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$.

Enligt **(IV)** gäller $a^{\frac{1}{2}} \cdot b^{\frac{1}{2}} = (a\,b)^{\frac{1}{2}}$ och vi kan skriva att allmänt gäller:

(7.6) $\boldsymbol{\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a\,b}}$ [1]

jämte följdsatsen:

(7.6') $\boldsymbol{a \bullet \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^n \bullet b}}$

Formeln **(7.6)** utvidgas lätt till det fall, då vi har en produkt av fler än två *n*:e rötter.

Då $\boldsymbol{\left(\sqrt[n]{a}\right)^m}$ är en produkt av *m* faktorer $\boldsymbol{\sqrt[n]{a}}$ gäller enligt den utvidgade formeln **(7.6')**

(7.6'') $\boldsymbol{\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}}$

Som vid kvadratrötter får vi av **(7.6)** *divisionsformeln*:

(7.7) $\boldsymbol{\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}}$

Ex 54. *Förenkla* $\dfrac{\sqrt[5]{a^4 b^3} \cdot \sqrt[5]{a^3 b^4}}{\sqrt[5]{\dfrac{b}{a^3}}}$

Svar: $a^2 b \cdot \sqrt[5]{b}$

Ex 55. *Beräkna med fyra decimaler.* a) $\sqrt[3]{\dfrac{57}{10}}$; b) $\sqrt[3]{\dfrac{57}{10000}}$; c) $\sqrt[3]{5700}$;

d) $\sqrt[3]{\dfrac{57}{1000}}$; e) $\sqrt[3]{\dfrac{57}{100}}$

Svar: a) 1,7863 b) 0,1786 c) 17,8632 d) 0,3849 e) 0,8291 ;

Ex 56. *Förenkla och beräkna.* $\sqrt[3]{\dfrac{1}{4}} - \dfrac{6}{\sqrt[3]{4}} + \sqrt[3]{54}$

Svar: $\dfrac{1}{2}\sqrt[3]{2} \approx 0,6300$

Ex 57. *Beräkna.* $4\pi x^2$ om $\dfrac{3}{4}\pi x^3 = 1$

Svar: $x = \sqrt[3]{36\pi} \approx 4,8360$

[1] I det följande av detta kap. förutsätter vi förekommande bokstäver beteckna *pos* .tal.

Om potenser och logaritmer

I föregående kapitel ställde vi upp vissa enkla potenslagar **I – V**[1] för uttryck av formen a^n, varvid *n*, enligt den betydelsen som vi lagt in i beteckningen a^n, är ett positivt heltal. Man har emellertid funnit det lämpligt att ange a^n, där *n* ges ett godtyckligt värde, och definierat uttrycket så, att de nämnda räknelagarna fortfarande gäller. Detta blir (för rationella *n*-värden, 0 inberäknat) fallet, om vi inför följande tre *definitioner:*

(8.1) $$a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}$$ (*p* och *q* positiva heltal).

(Skall lag **III** gälla, måste ju $\left(a^{\frac{p}{q}}\right)^q$ vara $= a^p$, d.v.s. $= a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}$).

(8.2) $$a^0 = 1 .$$

(Här blir lag **II**, $\dfrac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$, giltig för $n = m$, varvid bråkets värde är **1** och a^0).

(8.3) $$a^{-m} = \frac{1}{a^m}$$ (*m ett positivt hel- eller bråktal*).

(Lag **II** gäller då även om $n = 0$. Villkoret $n > m$ bortfaller).

Ex 61. *Vad betyder:* a) $a^{\frac{2}{3}}$; b) $4^{\frac{1}{2}}$; c) x^{-3} ; d) b^{-1} ; e) $a^{-\frac{4}{5}}$; f) $x^{\frac{3}{2}} y^{-1} z^0$? ;

Ett uttryck av formen a^n *kallas* ***potens***[2]. En ***dignitet*** är alltså det *specialfall* av en ***potens***, då exponenten *n* är ett positivt heltal.

Ex 62. Skriv i potensform: a) $\sqrt[4]{a^3}$; b) $\dfrac{1}{b^2}$; c) $\sqrt[4]{\dfrac{1}{2}}$; d) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}$; e) $\dfrac{a}{b\sqrt{c}}$

Ex 63. Skriv i potensform (med 10 som bas): a) 100 : b) 1000 ; c) 10000 ; d) 0,1 ;

e) 0,01 ; f) 0,001 ;

Att potenslagarna **I – V** gäller för godtyckliga rationella exponentvärden (0 inräknat), kan vi nu visa om vi utgår från lagarnas giltighet för positivt heltalsvärden på exponenterna samt med användning av de tre definitionerna (**8.1** – **8.3**) ovan jämte förut bevisade rotlagar.

Vi genomför beviset av lag **I** för det fall, att exponenterna har positivt bråktalsvärden. (För andra exponentvärden och för de övriga lagarna sker beviset på liknande sätt).

---

[1] Sid 89.

[2] För att undvika komplikationer antar vi, att potensens bas *a* är positiv.

Om $n = \frac{p}{q}$ och $m = \frac{r}{s}$ kan vi skriva: $a^n \cdot a^m = a^{\frac{p}{q}} \cdot a^{\frac{r}{s}} = \sqrt[q]{a^p} \cdot \sqrt[s]{a^r} = \sqrt[qs]{a^{p \cdot s}} \cdot \sqrt[qs]{a^{rq}} =$

$$= \sqrt[qs]{a^{ps} \cdot a^{rq}} = \sqrt[qs]{a^{ps+rq}} = a^{\frac{ps+rq}{qs}} = a^{\frac{ps}{qs} + \frac{rq}{qs}} = a^{\frac{p}{q} + \frac{r}{s}} = a^{n+m}$$

Ex Va 3. Visa beviset för lag **II, III, IV** och **V**.

Ex 64. Använd potenslagarna för att förenkla: a) $a^{\frac{3}{2}} \cdot a^{\frac{1}{2}}$; b) $\frac{x^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{1}{2}}}$; c) $\left(z^{\frac{3}{4}}\right)^{\frac{4}{3}}$;

d) $c^{-\frac{3}{2}} \cdot c^2$; e) $\left(a^{-\frac{3}{5}}\right)^{-\frac{5}{3}}$; f) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-3} \cdot \left(\frac{2}{10}\right)^{-3}$; g) $\dfrac{a \cdot a^{\frac{6}{5}} \cdot b^2}{(2b)^{-2} \cdot a^{\frac{2}{10}} \cdot a^{-2}}$

Ex 65. Lös ex. 58 – 60 (sid 92) genom att skriva om rotuttrycken som potenser och tillämpa potenslagarna.

Ex 66. Förenkla och beräkna: $5^{\frac{2}{3}} \cdot 10^{\frac{1}{3}} + 4^{-\frac{2}{3}} \cdot \sqrt[3]{32} - 16 \cdot (1024)^{-\frac{1}{6}}$

Svar: $2\sqrt[3]{2} \approx 2{,}5198$

Man har även behov av att i en potens a^n låta exponenten n vara ett irrationellt tal. Med t.ex. $3^{(\sqrt{2})}$ menas då det värde, till vilket potenserna $3^{1,4}, 3^{1,41}, 3^{1,414}, 3^{1,4142}, \ldots$ närmar sig, då $\sqrt{2}$ ersätts med sina allt noggrannare rationella närmevärden. Även för irrationella exponentvärden kan potenslagarna visas gälla.

Va 4. Vad blir t.ex. $\left(2^{-\sqrt[3]{9}}\right)^{\sqrt[3]{3}}$?

Potenser med komplexa (imaginära) exponentvärden kommer vi inte här att gå in på.

Ex 67. Beräkna genom att skriva varje faktor som potens av 2 och tillämpa potenslagarna.

$$\frac{8 \cdot 256 \cdot \sqrt[3]{64}}{1024 \cdot \sqrt[7]{128}}$$

Svar: 4

Kunde man liksom i föregående exemplet ovan skriva alla tal som potenser av en och samma bas, kommer vissa sifferberäkningar (multiplikation, division och potensupphöjning) att enligt **potensla-**

garna I – III motsvaras av enklare räkningar med exponenterna. I praktiken har man valt 10 som bas av skäl, som vi strax skall se. Då 10^n är rationellt endast då *n* är ett positivt eller negativa heltal ($10^0 = 1$; $10^1 = 10$; $10^2 = 100$; $10^{-1} = 0.1$; $10^{-2} = 0.01$; . . .), blir ***exponenten irrationell, om ett annat rationellt tal än dignitet av 10 och dess inverterade värde skrivs som potens av 10.***

Talet **3800** skrivs approximativt som $\approx 10^{3.5798}$, där heltalssiffran **3** i exponenten benämns ***karakteristikan*** och anger att talet är av storleken 1000 samt att exponentens decimaler, **5798** ***mantissan***, bestämmer talets sifferföljd, här 3800. Talet **3801** kan skrivas approximativt som $\approx 10^{3.5799}$ (mantissans tre första siffror är samma som i föreg. mantissa).

Ex 68. Skriv talen a) 2 552 ; b) 6 765 och c) 0,02552 som potenser av 10:

Svar: $10^{3.4069}$; b) $10^{3.8303}$; c) $10^{0.4069-2}$ [3] ;

Av exemplen a) och c) framgår det att ***tal med samma siffror har samma mantissa*** i sina tiologaritmer, som endast skiljer sig med avseende på karakteristikan 3 respektive -2.

Karakteristikan för tal > 1 är en enhet mindre än antalet heltalssiffror och
för tal < 1 av formen 0, . . -n, där n är antalet nollor (heltalsnollan medräknad), varmed talet börjar.

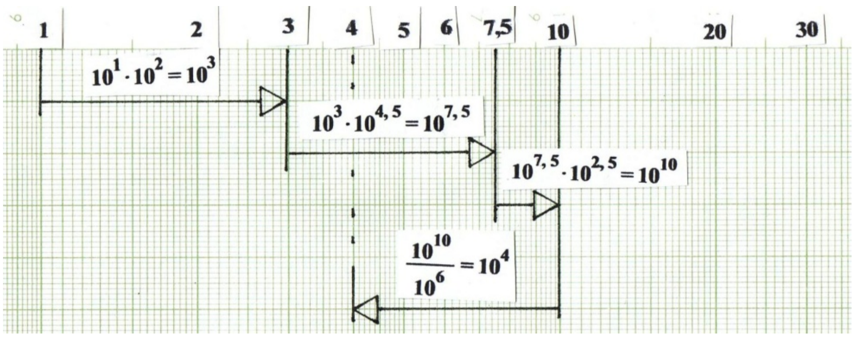
Ex 69. Ange tiologaritmerna för talen a) 3,895 ; b) 0,003895 ; c) 69070 ; d) 0,795 ; e) 0,0007 ; f) 11,457 ;

I stället för att multiplicera två eller flera tal med varandra kan man övergå till att ***addera dess logaritmer*** om de har ***samma bas*** för att sedan erhålla resultatet genom att logaritmsumman sätts som exponent till basen. Analogt sätt gör man om man skall **dividera talet *a* med *b*** men nu **minskar man *a:s* logaritm med *b:s* dito**. Detta är till stor hjälp när man behandlar stora tal. I naturen förekommer fenomen, som är uppbyggt logaritmiskt, t.ex. vår hörsel. Ett ljud vars energi är tio ggr kraftigare än ett första ljud, uppfattar vi som endast dubbelt kraftigare än det första.

Med hjälp av logaritmpapper kan vi belysa detta.

$$10 \cdot 100 = 1000 \to 10^{1+2} = 10^3 \text{ ; } 1000 \cdot 31.622,7766 = 31.622.776,7 = 10^{3+4,5} = 10^{7,5} \text{ ;}$$

$$31.622.776,7 \cdot 316,2278 = 10^{7,5+2,5} = 10^{10} \text{ ; } \frac{10.000.000.000}{1.000.000} = 10^{10-6} = 10^4 = 10.000 \text{ ;}$$



Nomogram 1. *Logaritm*

[3] Miniräknaren adderar karakteristikan och mantissan och visar $10^{-1.5931}$. OBS! Den negativa karakteristikan skrivs normalt efter mantissan för att visa samma mantissor för lika talföljder oberoende talets storlek.

Serier

9.1 Aritmetisk serie

En aritmetisk serie kännetecknas av att *differensen* mellan två på varandra följande termer är konstant.

Om den första termen betecknas med a, så är den 2:a termen $a + d$, den 3:e $a + 2d$, och den n:e $a + (n - 1)\,d$. Betecknar man seriens summa med s får vi:

$$s = 8 + 11 + 14 + 17 + 20$$

men vi får även — Adderar man dessa får vi

$$s = 20 + 17 + 14 + 11 + 8$$

$$2\,s = 28 + 28 + 28 + 28 + 28 = 5 \cdot (8 + 20)$$ som ger

(9.1) $$s = 5 \cdot \frac{8 + 20}{2} \quad \text{eller generellt} \quad s = n \cdot \frac{a + [a + (n - 1) \cdot d]}{2}$$

Allmänt är *summan lika med antalet termer multiplicerat med medeltalet av första och sista termen i serien.*

Ex. 95. Vilken är den 51:a termen i serien 2, 5, 8, . . . ?

Ex. 96. Vilken är summan av a) de n första hela talen? b) de n första udda talen? c) de n första jämna talen?

9.2 Geometrisk serie

En geometrisk serie kännetecknas av att *kvoten* mellan två på varandra följande termer är konstant.
Kvoten i serien $21 + 7 + \frac{21}{9} + \frac{21}{27} + \frac{21}{81}$ mellan en term och närmast föregående är här $\frac{1}{3}$.
Allmänt ser en geometrisk serie med n termer ut som följer:

(9.2) $$a + a \cdot k + a \cdot k^2 + \ldots\ldots + a \cdot k^{n-1}$$

om 1:a termen betecknas med *a* och kvoten med *k* får vi summan *s*.

(1) $$s = a + a \cdot \cancel{k} + a \cdot \cancel{k^2} + \ldots\ldots + a \cdot \cancel{k^{n-1}}$$
Förlänger vi likheten med k får vi:

(2) $$-\left(k \cdot s = a \cdot \cancel{k} + a \cdot \cancel{k^2} + \ldots + a \cdot \cancel{k^{n-1}} + a \cdot k^n\right)$$ och efter subtraktion får vi

$$s \cdot (1 - k) = a \cdot \left(1 - k^n\right)$$
som ger

(9.3) $$s = a \cdot \frac{1 - k^n}{1 - k} \qquad \text{giltigt för alla } k \neq 1$$

Råkar k vara = 1 är summan = $n \cdot a$ (n st. a), jämför **(9.2)** ovan genom att sätta $k = 1$.

Ex.97. a) Hur stor är den 11:e termen i serien $2, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \ldots$?

b) Och vilken term i ordningen är $\frac{1}{128}$?

Ex. 98. Inskjut mellan -0,2 och 625 fyra tal, så att en geometrisk serie bildas.

9.3 Sammansatt ränta

När vi utför ränteberäkningar kan vi använda följande beteckningar på de begrepp som vi hanterar:

r = räntesats i %
n = antalet perioder
PMT = periodens inbetalning [*annuiteten* = *ränta* + *amortering*] (payment)
PV = nuvärde (present value)
FV = kommande värde (future value)
(1+*r*) = förändringsfaktorn

Några samband

(9.4) $$PV = \frac{1-(1+r)^{-n}}{r} \cdot PMT$$

Eller med ord: *nuvärdet (PV) är lika med bråket 1 minus förändringsfaktorn (1+r) upphöjt det negativa värdet av antalet perioder (-n) i täljaren och räntesatsen r i nämnaren samt bråket multiplicerat med inbetalt annuitetsbelopp (PMT) i slutet av varje period.*

(9.5) $$PMT = \frac{r}{1-(1+r)^{-n}} \cdot PV$$

Eller med ord: *annuiteten (PMT) är lika med bråket räntesatsen (r) i täljaren och 1 minus förändringsfaktorn (1+r) upphöjt med det negativa värdet av antalet perioder (-n) i nämnaren samt bråket multiplicerat med nuvärdet (PV) (normalt det lånade beloppet).*

(9.6) $$FV = PMT \cdot \frac{(1+r)^n - 1}{r}$$

Eller med ord: *slutvärdet (FV) är lika med ett konstant belopp (PMT), som betalas i slutet av varje period multiplicerat med bråket förändringsfaktorn upphöjt i antalet perioder* $(1+r)^n$ *minus 1 i täljaren samt räntesatsen i nämnaren.*

Ex. 99. Under 5 år har 25000 kr vuxit med 7674 kr. sök räntesatsen.

Ex. 100. Folkmängden i en stad har vuxit under en 10-årsperiod med 33 %. Hur stor är i medeltal den årliga tillväxtprocenten?

Ex. 101. Efter hur lång tid (år och dagar) har 50 000 vuxit till jämt 80 000 kr, om räntesatsen är 6 % och att räntan **kapitaliseras**[1] vid slutet av a) varje år, b) varje halvår?

[1] Räntan läggs till kapitalet.

Ex. 102. En egendom har en skuld, som årligen måste betalas med 9 000 kr i all framtid. Ägaren vill bli av med skulden genom att i fem år betala en lika stor inbetalning vid samma tid på året, som de 9 000 kr skall betalas. Hur stor blir varje inbetalning, om räntefoten är 6 % ?

9.4 Lösningsförslag

Ex95. Vi sätter $a=2$ och $d=5-2=3$. Vi får då den 51:a termen till $2+50\cdot 3=152$

Svar: 152

Ex 96. a) $s=\frac{1}{2}\cdot n\cdot(n+1)$;

b) $s=n\cdot\frac{2\cdot(1+(n-1))}{2} \rightarrow s=n^2$;

c) $s=n\cdot\frac{2+2n}{2} \rightarrow s=n(n+1)$;

Svar: a) $s=\frac{1}{2}n\cdot(n+1)$; b) $s=n^2$; c) $s=n\cdot(n+1)$

Ex 97. a) Hur stor är den 11:e termen i serien $2, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \ldots$? $2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{11-1}=\frac{1}{512}$

b) Och vilken term i ordningen är $\frac{1}{128}$? $2\cdot \mathrm{k}=1 \rightarrow \mathrm{k}=\frac{1}{2}$ och $a=2$ vilket ger

$$2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=\frac{1}{128} \rightarrow n=9$$

Svar: a) $\frac{1}{512}$; b) den 9:e

Ex 98. Inskjut mellan -0,2 och 625 fyra tal, så att en geometrisk serie bildas.

$-\frac{2}{10}\cdot k^{6-1}=625 \rightarrow k=-5$ och vi får serien $-\frac{2}{10}$; 1 ; -5 ; 25 ; -125 ; 625 ;

Svar: Talen är 1 ; -5 ; 25 ; -125 ;

Ex 99. Under 5 år har 25 000 kr vuxit med 7 674 kr. sök räntesatsen. Antag att förändringsfaktorn är (1 + x) där $r=x$. Vi kan då ställa upp problemet:

$$25\,000 \bullet (1+x)^5=(25\,000+7\,674) \rightarrow (1+x)^5=\frac{32\,674}{25\,000} \rightarrow$$

$$\rightarrow 1+x=\sqrt[5]{\frac{32\,674}{25\,000}} \rightarrow x=-1\pm\sqrt[5]{\frac{32\,674}{25\,000}} \rightarrow x\approx -1\pm 1,0550\rightarrow$$

$\rightarrow x_1=0,055\ldots\left(x_2=-2,0550\right)$; x_2 förkastas.

Svar: räntesatsen är 5,5 %.

Ex 100. Folkmängden i en stad har vuxit under en 10-årsperiod med 33 %. Hur stor är i medeltal den årliga tillväxtprocenten?

Proportionalitet

Förhållandet mellan två storheter är kvoten mellan deras mätetal, då de uttrycks i samma enheter. Så är t.ex. förhållandet mellan de två längderna 5 cm och 10 cm $\frac{1}{2}$ samt förhållandet mellan en kvadrats diagonal och sida är $\sqrt{2}$. Vilken enhet man väljer är likgiltigt. Uttrycks de båda sträckorna 5 cm och 10 cm i stället i mm, blir förhållandet dem emellan $\frac{50}{100}$, alltså fortfarande $\frac{1}{2}$. När man talar om förhållandet mellan storheter, förutsätts naturligtvis att storheterna är av samma slag, t.ex. två längder, två areor, två vikter, etc. fyra storheter sägs vara *proportionella*, om förhållandet mellan den första och andra (mätetal *a*, resp. *b*) = förhållandet mellan den tredje och fjärde (mätetal *c*, resp. *d*). då gäller likheten:

(11.1) $$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

Den fjärde storheten benämns *fjärde proportionalen* till de övriga (tagna i ordning 1:a, 2:a och 3:e)

Är de båda mellersta storheterna (den 2:a och 3:e) lika, d.v.s. har vi tre storheter, för vilkas mätetal *a*, *b*, *d* gäller, att

(11.2) $$\frac{a}{b} = \frac{b}{d}$$

Sägs **den tredje storheten** vara ***tredje proportionalen*** till den första och andra. Den andra storheten benämns ***medel proportionalen*** till den första och tredje.

Ex. 118. Ange fjärde proportionaliteten till a) längderna 5 m, 8 m och 3 m samt till
b) vikterna 2 kg, 3 kg och 400 gram.

Ex. 119. Vilken är den tredje proportionalen och medel proportionalen till de två sträckorna 7 cm och 28 cm?

Likheten **(11.1)**, där ju endast obenämnda tal ingår, kan på flera sätt omformas med hjälp av algebrans räknelagar.

Genom att avlägsna nämnaren erhåller vi

(11.3) $$a\,d = b\,c$$

Divideras denna likhets båda led med *a c*, får vi (sedan leden bytt plats)

(11.4) $$\frac{b}{a} = \frac{d}{c}$$

En likhet, som sägs ha uppkommit ur **(11.1)** genom ***invertering***.

Genom division av **(11.3)** med *c d* erhåller vi

(11.5) $$\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$$ vilken likhet man säger vara bildad ur **(11.1)** genom ***alternering***.

Om man ökar båda leden i (**11.1**) med talet 1 och gör liknämnigt, erhåller vi $\frac{a}{b}+1=\frac{c}{d}+1 \rightarrow$

(**11.6**) $$\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}$$

Denna likhet är bildad ur (**11.1**) genom ***sammansättning***.

Sätter man de båda leden i (**11.1**) = *k*, blir $a=k\cdot b$, $c=k\cdot d$. Adderar vi nu de båda likheterna får vi $a+c=k(b+d) \rightarrow k=\frac{a+c}{b+d}$ och genom subtraktion $a-c=k(b-d) \rightarrow k=\frac{a-c}{b-d}$.

Vi får nu

(**11.7**) $$\because \qquad \frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{a+c}{b+d}=\frac{a-c}{b-d}$$

De båda sista bråken i (**11.7**) sägs ha uppkommit ur de två första genom ***korresponderande addition***, resp. ***subtraktion***. På motsvarande sätt kan man ur flera än två sinsemellan lika bråk $\left(\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}=\ldots\right)$ bilda nya bråk $\left(\text{t.ex. } \frac{a+c-e\ldots}{b+d-f\ldots}\right)$ som är lika med vart och ett av de givna bråken.

De storheter, för vilka *a, b, c* och *d* i likheterna (**11.1**) - (**11.7**) , behöver inte alla nödvändigtvis vara av samma slag. Dock är att märka, att, om ett i dessa likheter ingående bråk skall kunna utläsas såsom förhållandet mellan två storheter, så måste storheterna i täljaren och nämnaren vara av samma slag.

Ex. 120. Om $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, visa att $\frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d}$ (***fördelning***)

Ex. 121. Om $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}$, visa att vart och ett av dessa bråk $=\frac{a-5c+2e}{b-5d+2f}$.

Exempel 122. Visa, att areorna av två trianglar med lika stora höjder förhåller sig till varandra såsom baserna.

Den ena triangelns area, bas och höjd kallar vi *T*, *b* och *h* ; motsvarande storheter hos den andra triangeln kallar vi T_1, b_1 och *h*. Vi får då $T=\frac{b\,h}{2}$ och $T_1=\frac{b_1\,h}{2}$ som efter division ger $\frac{T}{T_1}=\frac{b}{b_1}$.

Benämningen proportionella storheter användes även om flera storheter än fyra. Om mot en grupp storheter med mätetalen $a, b, c\ldots$ svarar en annan grupp lika många storheter med mätetalen $a_1, b_1, c_1 \ldots$ så, att

(**11.8**) $$\frac{a}{a_1}=\frac{b}{b_1}=\frac{c}{c_1}=\ldots$$ sägs den ena gruppens storheter vara (direkt) ***proportionella*** mot den andra gruppens. De tre största storheterna i de båda grupperna kan t.ex. vara sidor i var sin triangel; trianglarnas sidor är då proportionella, om (**11.8**) är uppfyllt.

Är däremot (**11.9**) $a\cdot a_1=b\cdot b_1=c\cdot c_1=\ldots$ säger man, att den ena gruppens storheter är ***omvänt proportionella*** mot den andra gruppens. Så är t.ex. en triangels tre höjder omvänt proportionella mot de mot de motsvarande baserna, då $a\cdot h_a=b\cdot h_b=c\cdot h_c$.

Vi kan här beskriva ytterligare fall av proportionalitet. – Omkretsen hos ett antal cirklar är proportionella mot cirkelns diameter, då kvoten mellan mätetalen för varje cirkels omkrets och samma cirkels diameter är $=\pi$. Man uttrycker saken kortare genom att säga, att en cirkels omkrets är proportionell mot des diameter och anger detta genom formeln **(11.10)** $\frac{O}{d}=\pi$ eller $O=\pi d$. Formeln innebär, att om en cirkels diameter och därmed dess omkrets förändras, så är dock kvoten mellan omkretsens och diameterns mätetal ständigt densamma. Detta konstanta värde kallas (här liksom i andra formler, som uttrycker proportionalitet) *proportionalitetskonstant* eller proportionalitetsfaktor.

Vid en likformig rörelse tillryggalägges på lika långa tid lika långa vägsträckor. Vägen (v) är då proportionell mot tiden (t) enligt **(11.11)** $\frac{v}{t}=h$ eller $v=h\cdot t$ där proportionalitetskonstanten ***h*** fått namnet hastighet. Mäter vi vägen i m och tiden i sek, blir hastigheten uttryckt i m/sek. Observera, att vägen och tiden är storheter av olika slag. För att samma ämne är tätheten (a) proportionell mot volymen (v).
Formel: **(11.12)** $\frac{a}{v}=s$ eller $a=s\cdot v$. Proportionalitetskonstanten ***s*** benämns täthet.
För en och samma gasmassa (vid oförändrad temperatur) är trycket (p) omvänt proportionellt mot volymen (v). Formel: **(11.13)** $p\cdot v=k$ där k är en konstant.
Formeln**(11.14)** $A=b\cdot h$ för en rektangels area anger, att arean är proportionell mot höjden, om basen är konstant, och att bas och höjd är omvänt proportionella, om arean är konstant.

Räntan på ett kapital uttrycks genom den kända formeln **(11.15)** $r=\frac{1}{100}Kpt$. Av uttrycket framgår, dels att räntan r är proportionell mot kapitalet K, om procenten p och tiden t är konstanta, dels att r är proportionell mot p, då K och p är konstanta. Man brukar kortare säga, att r är proportionell mot K, p och t, varvid proportionalitetskonstanten är $\frac{1}{100}$.

11.1 Lösningsförslag

Ex 118. a) $\frac{5}{8}=\frac{3}{d}\rightarrow d=\frac{3\cdot 8}{5}\rightarrow d=\frac{24}{5}$ eller $4,8$; b) $\frac{2}{3}=\frac{0,4}{d}\rightarrow d=\frac{3\cdot 0,4}{2}=0,6$

Svar: a) 4,8 m ; b) 0,6 kg

Ex 119.

a) $\frac{7}{28}=\frac{28}{\text{d}}\rightarrow d=\frac{28^2}{7}=112$;

b) $\frac{7}{x}=\frac{x}{28}\rightarrow x^2=7\cdot 28\rightarrow x=\pm 14\rightarrow \quad x_1=14$ ....$\left(x_2=-14 \text{ förkastas}\right)$

Svar: a) 112 cm ; b) 14 cm

Ex 120. $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\rightarrow \frac{a}{b}-1=\frac{c}{d}-1\rightarrow \frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d}\quad \because \frac{a}{b}=\frac{c}{d}\rightarrow \frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d}$ v.s.b.

Tre teorem för trianglar

14.1 Sinusteoremet

För den mot sidan c dragna höjden h_c får vi ur de båda rätvinkliga trianglarna i fig. 30 två uttryck, nämligen $a\sin(\beta)$ och $b\sin(\alpha)$.

$$\because\ \boldsymbol{a}\sin(\beta) = b\sin(\alpha) \quad \text{eller}$$

(14.1)
$$\frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{b}{\sin(\beta)}$$

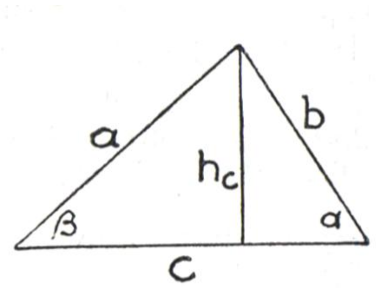


Fig. 30. *Spetsvinklig triangel*

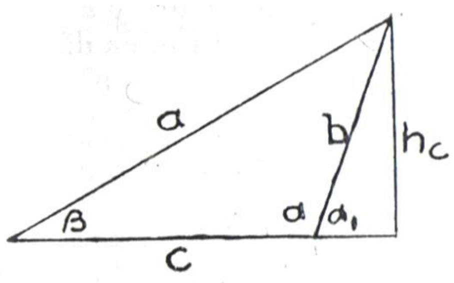


Fig. 31. *Trubbvinklig triangel*

Ur fig. 31, där vi kallat sidovinkeln till den trubbiga vinkeln **α** för α_1 , får vi på samma sätt

$$a\sin(\beta) = b\sin(\alpha_1) \quad \text{eller}$$

$$\frac{a}{\sin(\alpha_1)} = \frac{b}{\sin(\beta)}$$

Formeln (**14.1**) kommer gälla även för detta fall, om vi kommer överens om att:

Sinus för en trubbig vinkel är = sinus för dess sidovinkel (supplementvinkel).

Drar vi höjden mot a eller b i stället för mot c, kan vi komplettera (**14.1**) med ett tredje led innehållande den tredje sidan och vinkeln. Som ett fullständigt uttryck för *sinusteoremet* får vi då:

(14.2)
$$\frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{b}{\sin(\beta)} = \frac{c}{\sin(\gamma)}$$

Eller i ord: ***I varje[1]triangel är sidorna proportionella mot de motstående vinklarnas sinus.***

I likheten (**14.1**) ingår fyra triangelelement, två sidor och de båda motstående vinklarna. Känner man tre av dessa element, kan det fjärde alltså beräknas med sinusteoremet.

[1] Teoremet gäller även för en rätvinklig triangel. Är t.ex. γ = 90° $(\sin(\gamma) = 1)$, får vi $\sin(\alpha) = \frac{a}{c},\ \sin(\beta) = \frac{b}{c}\ \ (\text{def.})$.

Ex. 181. Två vinklar i en triangel är 150° och 13°. Den mot den förra vinkeln stående sidan är 2 m. Beräkna den mot den senare vinkeln stående sidan. Svar: 0,8998 m.

14.2 Ytteoremet (Areateoremet)

Då i såväl fig. 30 och 31 $h_c = b\sin(\alpha)$ och då triangelarean är $T = \dfrac{c \cdot h_c}{2}$, får vi

(14.3) $$T = \frac{b\,c\sin(\alpha)}{2}$$

(14.3') $$\sin(\alpha) = \frac{2\,T}{b\,c}$$

Den fullständiga formeln

(14.4) $$T = \frac{b\,c\sin(\alpha)}{2} = \frac{a\,c\,\sin(\beta)}{2} = \frac{a\,b\sin(\gamma)}{2}$$

ger uttryck åt det s.k. *ytteoremet, i ord:*

Arean av en triangel är halva produkten av två sidor och sinus för deras mellanliggande vinkel.

Ex. 182. Två sidor i en triangel är 2 och 3 dm samt deras mellanliggande vinkel 149°. Beräkna triangelns area. Svar:1,5451 dm^2.

14.3 Cosinusteoremet

Tillämpar vi i fig. 30$_b$ Pytagoras sats på den rätvinkliga triangeln, vars hypotenusa är *a* och vars kateter är $b\sin(\alpha)$ och $(c - b\cos(\alpha))$, får vi

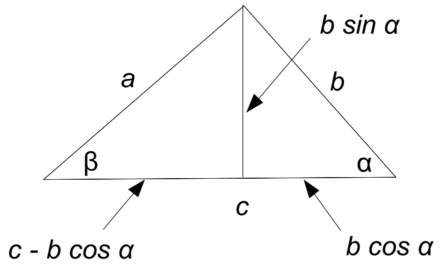


Fig. 30b. Spetsvinklig triangel

$$a^2 = (b\sin(\alpha))^2 + (c - b\cos(\alpha))^2 \rightarrow$$
$$\rightarrow a^2 = b^2\sin^2(\alpha) + (c^2 + b^2\cos^2(\alpha) - 2\,b\,c\cos(\alpha)) \rightarrow$$

eller då **(12.5)** $\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1$

$$a^2 = b^2 \cdot (\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha)) + c^2 - 2\,b\,c\cos(\alpha) \rightarrow$$

(14.5) $$a^2 = b^2 + c^2 - 2\,b\,c\cos(\alpha)$$

Ur motsvarande triangel fig. 31 (hypotenusan *a*, kateterna $b\sin(\alpha_1)$ och $c + b\cos(\alpha_1)$) får vi på samma sätt

$$a^2 = b^2 + c^2 + 2\,b\,c\cos(\alpha_1)$$

Formeln (**14.5**) kommer att gälla även för denna trubbvinkliga triangel under förutsättning att ***cosinus för en trubbig vinkel är = minus cosinus för sidovinkeln (supplementvinkeln).***

Formel (**14.5**) och två analogt härledda formler utgör det s.k. *cosinusteoremet:*

(**14.6**)
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2\,b\,c\cos(\alpha)$$
$$b^2 = c^2 + a^2 - 2\,c\,a\cos(\beta)$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2\,a\,b\cos(\gamma)$$

eller i ord: ***I varje[2] triangel är kvadraten på en sida = summan av kvadraterna på de andra sidorna minus med dubbla produkten av dessa sidor och cosinus för deras mellanliggande vinkel.***

I formel (**14.5 / 14.6**) ingår fyra triangelelement, tre sidor och en vinkel. Är tre av dessa kända, kan alltså det fjärde beräknas med cosinusteoremet.

Ex. 183. I en triangel är två sidor 2 och 3 dm samt mellanliggande vinkel 120°. Beräkna den tredje sidan. Svar: $\sqrt{19} \approx 4.359$ dm.

14.4 Lösningsförslag

Ex 181. $\dfrac{2}{\sin(150)} = \dfrac{x}{\sin(13)} \rightarrow x = \dfrac{2\sin(13)}{\sin(150)} \rightarrow x = 0.8998$ Svar: 0,900 m.

Ex 182. $T = \dfrac{2\cdot 3\sin(149)}{2} \rightarrow T = \dfrac{6\cdot 0.5150}{2} = 1.5451$ Svar: 1,5451 dm^2.

Ex 183. $a^2 = 2^2 + 3^2 - 2\cdot 2\cdot 3\cos(120) \rightarrow a = \sqrt{13 - 12\cdot(-0.5)} = \sqrt{19}$

Svar: $\sqrt{19} \approx 4.359$ dm.

[2] Teoremet gäller även för en rätvinklig triangel. Är t.ex. $\alpha = 90°$ $(\cos(\alpha) = 0)$, ger formel (**14.6**) $a^2 = b^2 + c^2$ (**Pytagoras sats**).

14.5 Hjärngymnastik

Tänk på ett tal mellan 1 och 63 / 127 / 255 /..... / 1 048 575

Du har ett antal brickor med ifyllda tal.

1	3	5					
						125	127

2	3	6	7	10	11		
						126	127

4	5	6	7				
				124	125	126	127

8	9	10	11	12	13	14	15
							127

16							
							127

32							
							127

64							
							127

Bild.71b. *7 tal-brickor*

Procedur: Du uppmanar en person att tänka på ett tal mellan 1 och t.ex. 127. Du visar denne en bricka i sänder och frågar om talet finns med på brickorna, ja eller nej. När brickorna är genomgångna säger du vilket tal han tänkte på.

- Försök hitta mönstret i taluppbyggnaden på respektive bricka.
- Fyll i de felande siffrorna och avlägsna färgerna.
- Du kan utöka antalet brickor och får då fördubbla antalet tal (rutor) per bricka för varje ny dito.
- Fundera också ut hur du skall veta vilket tal, som den utfrågade tänker på.

Författaren gjorde en uppsättning på 20 brickor i gymnasiet från 1 t.o.m. 1 048 575, men fick ha en invigd mellanhand, som hjälpte den utfrågade att svara ja eller nej på brickorna, vilka inte var helt utskrivna utan visade endast talserierna som t.ex. **alla udda tal**; 2-3, 6-7, o.s.v.; **4-7, 12-15**, o.s.v.; 8 - 15, 24 -31, o.s.v.

Solvering av snedvinkliga trianglar

För att solvera trianglar har vi nu tillräckligt med hjälpmedel (förutom miniräknarens trigonometriska funktioner) sinus- och cosinusteoremen jämte den kända satsen om triangelns vinkelsumma: $\alpha+\beta+\gamma=180^\circ$, dessutom kan arean beräknas med hjälp av ytteoremet. De tre av varandra oberoende element, som måste vara givna, kan ha sådana talvärden, att ingen triangel kan bildas av dem, och det kan även inträffa, att man får två trianglar. Vid triangelsolvering kan man särskilja fyra fall (jämför **de fyra *kongruensfallen***, sid **157-158**).

En sida och två vinklar är kända.

($\mathbf{I_{SVT}}$)[1] Man erhåller den tredje vinkeln av triangelns kända vinkelsumma och de obekanta sidorna med sinusteoremet. Om de båda givna vinklarna är mindre än 180°, kan i detta fall alltid en (och endast *en*) triangel bildas.

Exempel.184. Givet: $a=4.257$, $\alpha=32.15^\circ$, $\beta=10.76^\circ$ Solvera triangeln och beräkna arean.

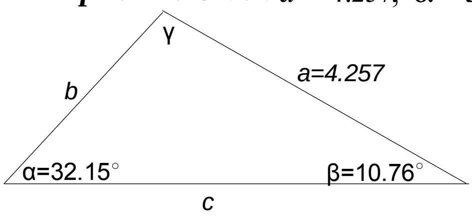


Bild 72. Spetsvinklig triangel

$$\gamma=180^\circ-(\alpha+\beta)=137.09^\circ\ ;$$

$$b=\frac{a\sin(\beta)}{\sin(\alpha)}=\frac{4.257\cdot\sin(10.76)}{\sin(32.15)}=1.4935\ ;$$

$$c=\frac{a\sin(\gamma)}{\sin(\alpha)}=\frac{4.257\cdot\sin(137.09)}{\sin(32.15)}=5.4467\ ;$$

$$T=\frac{a\,b\sin(\gamma)}{2}=\frac{4.257\cdot1.4935\cdot\sin(137.09)}{2}=2.1644\ ;$$ Märk, att $\sin(\gamma)=\sin(\alpha+\beta)$.

Två sidor (*a* och *b*) och en motstående vinkel (α) är kända.

($\mathbf{II_{SVT}}$) Den andra motstående vinkeln (β) får vi med sinusteoremet, därefter den tredje vinkeln av triangelns vinkelsumma och sedan den tredje sidan med sinusteoremet. Vid beräkning av β kan det inträffa, att:

(**1**) $\sin(\beta)$ blir <1 (Vid logaritmisk räkning är $\sin(\beta)<0$). Värdet på sinus svarar då mot två vinklar: dels den spetsiga vinkeln och dels (enligt gjord överenskommelse) den trubbiga vinkeln, som den förras supplementvinkel. Båda dessa kan användas, om den sökta vinkeln (β) står emot den större av de givna sidorna $(b>a)$. Två trianglar kan då bildas av de givna elementen (α måste dock såsom stående mot den mindre sidan vara spetsig). Däremot kan endast den spetsiga vinkeln användas, om den sökta vinkeln står mot den mindre av de givna sidorna $(\mathrm{b}<\mathrm{a})$. Vi får endast *en* triangel då (α får vara såväl spetsig som trubbig).

(**2**) $\sin(\beta)$ blir $=1$ ($\log_{10}(\sin(\beta))=0$), vilket svarar mot det enda värdet $\beta=90^\circ$.

En lösning och vi får en rätvinklig triangel, (α måste såsom ingående i en rätvinklig triangel vara spetsig).

[1] SVT = Sned-Vinklig-Triangel.

(3) $\sin(\beta)$ blir > 1 [$\log_{10}(\sin(\beta) > 0$]. Då värdet av sinus inte kan överstiga 1,[2] kan *ingen* triangel bildas av de givna elementen.

Av de tre fallen framgår det tydligt när man konstruerar en triangel, då två sidor $(a \text{ och } b)$ samt en motstående vinkel (α) är givna. Man avsätter nu från den givna vinkelns spets på det ena vinkelbenet ett stycke = *b*, vars andra ändpunkt (där *b* möter *a*) utgör medelpunkten för en cirkel med radien = *a*. I fig. 32b är de tre omnämnda fallen markerade med motsvarande siffror. Då enligt sinusteoremet $\sin(\beta) = \dfrac{b\sin(\alpha)}{a}$, varvid $b\sin(\alpha) = h$ (se fig.), innebär $\sin(\beta) < 1$, att $a > h$; $\sin(\beta) = 1$, att $a = h$ och $\sin(\beta) > 1$, att $a < h$

(Även om det inte är nödvändigt, bör man vid triangelsolvering för kontrollens skull utföra konstruktionen i enhetlig skala.)

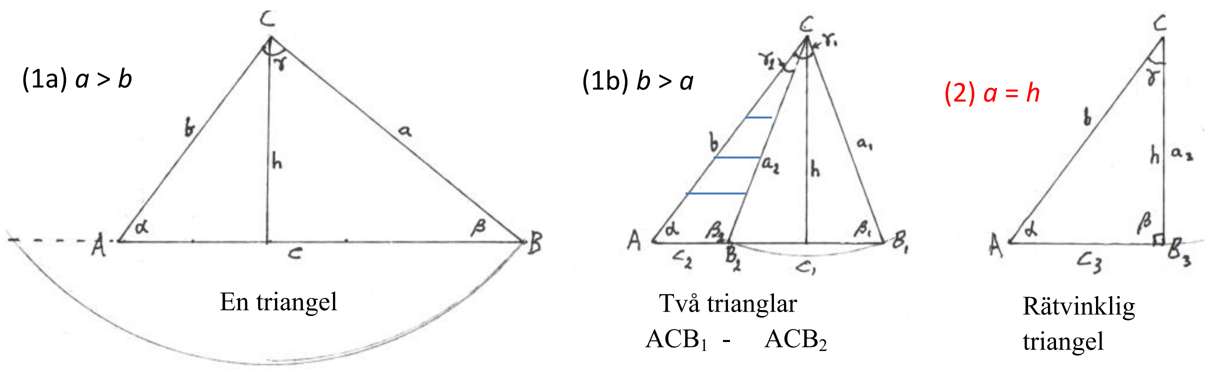


Fig. 32. *Konstruktion av triangel*

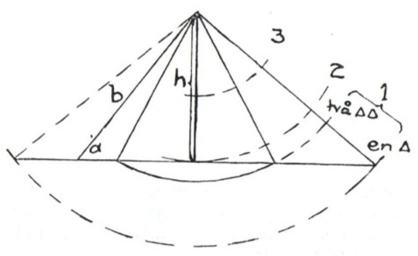


Fig. 32b är Erikssons sammanställning av fig. 32.
OBS! Att (2) *a = h* inte är en snedvinklig triangel. Är $a = b$, har vi inte en snedvinklig triangel utan en likbent eller en liksidig triangel.

Fig. 32b. *Konstruktion av triangel - sammanställning*

Exempel. 185. Givet: $a = 10.48$; $b = 13.25$; $\alpha = 29.37^\circ$. Solvera triangeln.

$$\sin(\beta) = \frac{b\sin(\alpha)}{a} = 0.6201 \text{ (∵ fallet 1 med två trianglar)}, \ \beta_1 = 38.32^\circ,$$

$$\beta_2 = 180^\circ - \beta_1 = 141.68^\circ; \ \gamma_1 = 180^\circ - \alpha - \beta_1 = 112.31^\circ; \quad \gamma_2 = 180^\circ - \alpha - \beta_2 = 8.95^\circ;$$

$$c_1 = \frac{a\sin(\gamma_1)}{\sin(\alpha)} = 19.769, \ c_2 = \frac{a\sin(\gamma_2)}{\sin(\alpha)} = 3.324$$

[2] d.v.s. h > a vilket är orimligt.

Exempel. 186. Givet: $b = 4.281$; $c = 7.134$; $\beta = 3687592^\circ$ Solvera triangeln.

$$\sin(\gamma) = \frac{c\sin(\beta)}{b} = \frac{7.134 \cdot \sin(36.87592)}{4.281} = 0.999999967 \approx 1$$

(∵ fallet (2)) $\to \gamma = 90^\circ$; $\alpha = 90^\circ - 36.87592^\circ = 53.12408^\circ$;

$a = c\sin(\alpha) = 7.134 \cdot \sin\left(53.12408^\circ\right) \approx 5.707$;

Två sidor och mellanliggande vinklar är kända.

($\mathbf{III_{SVT}}$) Först bestäms den tredje sidan med cosinusteoremet och sedan beräknas den *mindre* av de obekanta vinklarna med sinusteoremet, varpå den tredje vinkeln får vi av triangelns vinkelsumma. Man får alltid en (och endast *en*) triangel.

Anledningen till att välja den mindre vinkeln (d.v.s. den mot den mindre av de givna sidorna) är, att denna med säkerhet är spetsig (om den större vinkeln är spetsig eller trubbig kan vi inte avgöra med kännedom om dess sinus.) Dessutom tillkommer, att noggrannheten i vinkelbestämningen blir större vid detta val av den spetsiga vinkeln (sinusfunktionen ändras långsammare, ju närmare 90° vinkeln ligger).

Exempel. 187. Givet: $a = 50.46$; $b = 48.74$; $\gamma = 24.1^\circ$. Solvera triangeln.

$c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2\,a\,b\cos(\gamma)}$. Då $a^2 = 2546.21$, $b^2 = 2375.59$, $2\,a\,b\cos(\gamma) = 4490.09$, blir

$c = \sqrt{431.71} = 20.78$; $\sin(\beta) = \dfrac{b\sin(\gamma)}{c} = 0.9577 \to \beta = 73.3^\circ$; $\alpha = 180^\circ - \beta - \gamma = 82.6^\circ$

Alla sidorna är kända.

($\mathbf{IV_{SVT}}$) En av vinklarna bestäms med cosinusteoremet, därefter den *mindre av de båda övriga* med sinusteoremet, varefter den återstående vinkeln får vi av triangelns vinkelsumma[3]. Man får en (och endast *en*) triangel, om summan av två sidors talvärden är större än den tredje sidans.

Vi börjar förslagsvis med den mellersta vinkeln (den största kan vara trubbig, varvid dess cosinus enligt gjord överenskommelse är negativ; den minsta ger sämre noggrannhet, då cosinus ändras långsammare, ju närmare 0° vinkeln ligger[4]).

Exempel. 188. Givet: $a = 5.128$; $b = 4.532$; $c = 8.036$. Solvera triangeln.

$\cos(\alpha) = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2\,b\,c}$. Då $b^2 = 20.539$, $c^2 = 64.577$ och $a^2 = 26.294$ blir

$$\cos(\alpha) = \frac{58.820}{2 \cdot 4.532 \cdot 8.036} = 0.8075 \to$$

$$\to \alpha = 36.14^\circ ;\ \sin(\beta) = \frac{b\sin(\alpha)}{a} = 5.5212 \to \beta = 31.41^\circ ;$$

$$\gamma = 180^\circ - \alpha - \beta = 112.45^\circ$$

---

[3] Är sidorna uttryckta i enkla tal, kan det vara lika lätt att beräkna två vinklar med cosinusteoremet (och även den tredje för kontrollens skull).

[4] Har endast betydelse då vi hämtar talvärdet från tabeller i stället för miniräknare, som visar tillräckligt många decimaler, eller datorprogram för matematik.

Svar: $\alpha = 36.14^\circ$, $\beta = 31.41^\circ$ och $\gamma = 112.45^\circ$.

Ex. 189. Två krafter på 4.6 och 5.0 Pa [5] påverkar i samma punkt och bildar 40° vinkel med varandra. Sök deras resultant. Svar: Resultanten är 9.0 Pa

Ex. 190. En kraft på 83.25 Pa skall uppdelas i två komposanter, som med densamma bildar vinklarna 50.3° och 48.6°. Bestäm komposanternas storlek.

Svar: 63.21 och 64.83 Pa.

Ex. 191. I ett parallelltrapets är de parallella sidorna 5 och 8 cm samt de icke parallella 2 och 4 cm. Beräkna figurens vinklar och dess area. – Vi drar en konstruktionslinje, som delar trapetset i en triangel och en parallellogram.

Svar: Vinklarna: 104.5°, 75.5°, 151.0° och 29.0°, Arean: 12.59 cm^2.

Ex. 192. För att bestämma avståndet mellan två punkter *A* och *B* har man från punkt *C* uppmätt $AC = 520$ m och $BC = 600$ m. Därefter har man utefter *CA* mätt av $CD = 10$ m och utefter *CB* sträckan $CE = 12$ m. Sträckan *DE* befanns vara 9.6 m. Beräkna *AB*.

Svar: Sträckan $AB = 485$ m.

Ex. 193. För att bestämma höjden av en bergstopp *P* uppmätte man i två punkter *A* och *B*, som ligger i horisontalplanet genom bergets fot på 930 m avstånd från varandra, vinklarna $QAB = 47.5^\circ$ och $QBA = 56.8^\circ$, där *Q* är *P*:s projektion i horisontplanet. Dessutom bestäms vinkeln PAQ (toppens höjdvinkel eller elevationsvinkel) till 35.6°. Hur högt är berget?

Svar: 575 m

Ex. 194. I en triangel är två sidor 102.3 och 103.4 cm samt mellanliggande vinkel 50.6°. Beräkna arean och ange beräkningsfelet. Felet i angivna värden är 1 enhet i sista siffran.

Svar: 4087 ± 14 cm^2

[5] 1 Pa (Pascal) = $\frac{N}{m^2} = \frac{kg}{m \cdot s^2}$

Regelbundna månghörningar

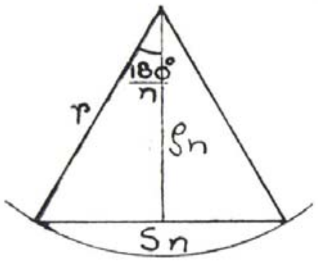


Fig. 36. Element i en regelbunden månghörning

Sammanbinder manen regelbunden n-hörnings mittpunkt med ändpunkterna av en sida s_n, erhåller man en likbent triangel (n-hörningens grundtriangel, se fig. 36), där de lika stora sidorna är r (omskrivna cirkelns radie) och vinkeln mellan är $\frac{360^\circ}{n}$. Den mot s_n, dragna höjden ϱ_n (den i månghörningen inskrivna cirkelns radie, även kallad **månghörningens apotem**) delar grundtriangeln i två kongruenta rätvinkliga trianglar. Ur den ena av dessa kan man, om två av storheterna n, r, s_n, ϱ_n är givna, beräkna de båda övriga.

Utgår vi t.ex. från n och r som kända, får vi:

(17.1) $$s_n = 2\, r \sin\left(\frac{180^\circ}{n}\right)$$

(17.2) $$\varrho_n = r \cos\left(\frac{180^\circ}{n}\right)$$ [1]

Grundtriangelns area t_n får vi som halva produkten av bas och höjd eller också enligt ytteoremet[2]:

(17.3) $$t_n = r^2 \sin\left(\frac{180^\circ}{n}\right) \cos\left(\frac{180^\circ}{n}\right) = \frac{r^2}{2} \sin\left(\frac{360^\circ}{n}\right)$$ [3]

Månghörningens area: **(17.4)** $$a_n = n \cdot t_n$$

och dess

omkrets: **(17.5)** $$o_n = n \cdot s_n.$$

Ex. 204. Beräkna den regelbundna 9-hörningens omkrets och area, a) om den omskrivna cirkelns radie är 5 cm; b) om den inskrivna cirkelns radie är 5 cm.

Svar: a) 30.78 cm ; 72.31 cm^2 b) 32.76 cm ; 81.89 cm^2.

För vissa n-värden finns på de trigonometriska funktionerna för $\frac{180^\circ}{n}$ *exakta* uttryck, i vilka av irrationella tal endast kvadratrötter ingår; i sådana fall kan man även exakt uttrycka s_n (liksom ρ_n, t_n, a_n, o_n) i $\boldsymbol{r}$.

---

[1] ϱ (ro) grekisk bokstav, se appendix sid **369**.

[2] **(14.1) sid** 189**.**

[3] Jfr **(20.7) sid** 248**.**

Ex. 205. Uttryck exakt s_n och t_n i r, när n = 3, 4 och 6.

Av (**17.1**) och (**17.3**) får vi med kännedom om de exakta uttrycken på sinus för 30°, 45°, och 60° [4]

$s_3 = r\sqrt{3}$, $s_4 = r\sqrt{2}$, $s_6 = r$, och $t_3 = \frac{r^2}{4}\sqrt{3}$, $t_4 = \frac{r^2}{2}$, $t_6 = \frac{r^2}{4}\sqrt{3}$.

(Hur kan uppgiften lösas på annat sätt?)

Vid exakt beräkning av s_n för en del andra n-värden än i exemplet ovan kan vi använda cosinusteoremet, som, tillämpat på n-hörningens grundtriangel, ger

(17.6) $$s_n^2 = 2r^2\left(1 - \cos\left(\frac{360^\circ}{n}\right)\right)$$

Vi får t.ex.

(1) $s_8 = r\sqrt{2-\sqrt{2}}$

(2) $s_{12} = r\sqrt{2-\sqrt{3}}$

Med hjälp av (**17.1**) och (**17.6**) kan man alltid exakt beräkna sidan i en regelbunden månghörning under förutsättning, att man har ett exakt värde på sidan i den regelbundna månghörningen, som har ***hälften*** (eller ***dubbelt***) så många sidor. Så är t.ex. enligt (**17.1**) och (**17.6**)

(3) $s_8 = 2r\sin(22.5^\circ)$

(4) $s_{16}^2 = 2r^2\left(1-\cos(22.5^\circ)\right)$

Ur (3) får vi användning av det nyss visade exakta värdet på s_8, $\sin(22.5^\circ) = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$, varav

$\cos(22.5^\circ) = \sqrt{1-\sin^2(22.5^\circ)} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$. Sätter vi in detta i (4) får vi

$s_{16}^2 = 2r^2\left(1-\cos(22.5^\circ)\right) \rightarrow s_{16}^2 = 2r^2\left(1 - \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}\right) \rightarrow s_{16}^2 = r^2\left(2-\sqrt{2+\sqrt{2}}\right) \rightarrow$

(17.60) $$s_{16} = r\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}$$

Från (**17.6**) får vi t.ex.

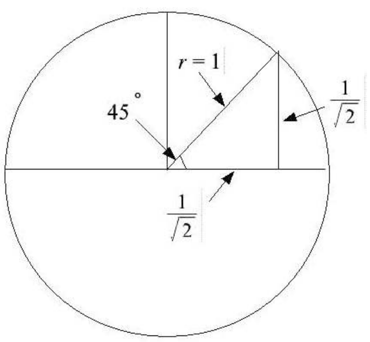


Bild. 82b. *Vinkel = 45°*

$s_n^2 = r^2 + r^2 - 2rr\cos\left(\frac{360^\circ}{n}\right) \rightarrow s_n^2 = 2r^2 - 2r^2\cos\left(\frac{360^\circ}{n}\right) \rightarrow$

$\rightarrow s_n^2 = 2r^2\left(1-\cos\left(\frac{360^\circ}{n}\right)\right)$

För n = 8 och r =1 är

$s_8^2 = 2r^2\left(1-\cos\left(\frac{360^\circ}{8}\right)\right) \rightarrow s_8^2 = 2\left(1-\cos(45^\circ)\right) \rightarrow$

$\rightarrow s_8^2 = 2 - 2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} \rightarrow s_8^2 = 2-\sqrt{2} \rightarrow$

$\rightarrow s_8 = \sqrt{2-\sqrt{2}}$

(Det negativa värdet kan inte användas till mätetal för en sträcka och förkastas)

(17.61) $$s_8 = r\sqrt{2-\sqrt{2}}$$

[4] (**12.1**) **Sid. 175.**

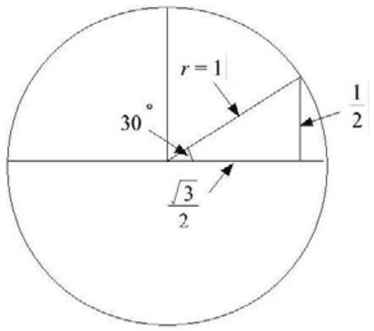


Bild. 82c. *Vinkel =30°*

för n = 12 och r =1 är

$$s_{12}^2 = 2\left(1 - \cos\left(\frac{360^\circ}{12}\right)\right) \rightarrow s_{12}^2 = 2\left(1 - \cos\left(30^\circ\right)\right) \rightarrow$$

$$\rightarrow s_{12}^2 = 2 - 2\,\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{1} \rightarrow s_{12}^2 = 2 - \sqrt{3} \rightarrow s_{12} = \sqrt{2 - \sqrt{3}}$$

(Det negativa värdet förkastas.)

(17.62) $$s_{12} = r\sqrt{2 - \sqrt{3}}$$

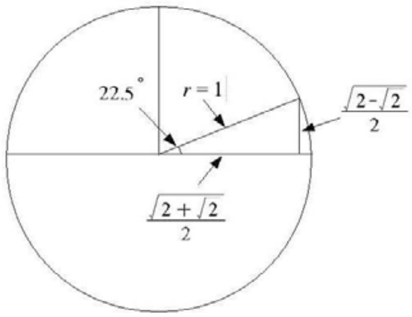


Bild. 82d. *Vinkel =22,5°*

för n = 16 och r =1 är

$$s_{16}^2 = 2\left(1 - \cos\left(\frac{360^\circ}{16}\right)\right) \rightarrow s_{16}^2 = 2\left(1 - \cos\left(22.5^\circ\right)\right) \rightarrow$$

$$\rightarrow s_{16}^2 = 2 - 2\,\frac{\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}}{1} \rightarrow s_{16}^2 = 2 - \sqrt{2 + \sqrt{2}} \rightarrow$$

$$\rightarrow s_{16} = \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2}}}$$ (Det negativa värdet förkastas.)

(17.60) $$s_{16} = r\sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2}}}$$

De regelbundna n-hörningar, vilkas sidor man exakt kan beräkna, kan rent geometriskt[5] inskrivas i en cirkel. Kan konstruktionen verkställas för ett visst n-värde, får man genom att **halvera** medelpunktsvinklarna den inskrivna regelbundna **2 *n*-hörningen** (och genom att **fördubbla** medelpunktsvinkeln får vi den **regelbundna $\frac{n}{2}$ hörningen**, när n är ett jämt tal).

Då man nu lätt utför konstruktionen, om n är 6 och 4, kan man också göra det, när n har värdena 3, 6, 12, 24 . . . och 4, 8, 16, 32 . . . .

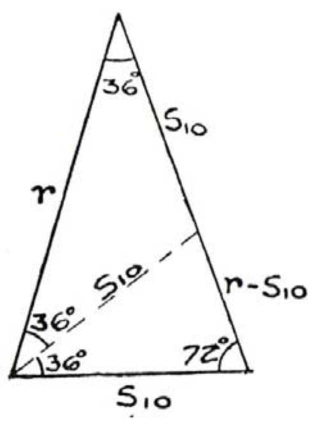


Fig. 37. *Grundtriangel 10-hörning*

Även för en tredje grupp n-värden 5, 10, 20, 40 . . . kan konstruktionen utföras, liksom man exakt kan beräkna dessa regelbundna n-hörningars sidor. Vi börjar lämpligen med 10-hörningen, vars grundtriangel är tecknad i fig. 37. Av bissektrisen till den ena basvinkeln delas grundtriangeln i två likbenta trianglar. Enligt bissektrissatsen (eller på grund av likformigheten mellan hela grundtriangeln och den vid dess bas liggande deltriangeln) får man

(17.7) $$\frac{r}{s_{10}} = \frac{s_{10}}{r - s_{10}}$$

eller

$$s_{10}^2 = r\left(r - s_{10}\right)$$

Denna 2:a grads ekvation i s_{10} ger $s_{10} = -\frac{r}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{r}{2}\right)^2 + r^2}$

(Det negativa värdet kan inte användas till mätetal för en sträcka och förkastas)

[5] Endast med tillhjälp av linjal och passare; inte med gradskiva eller genom ”passning”.

(17.8) $$s_{10} = \sqrt{r^2 + \left(\frac{r}{2}\right)^2} - \frac{r}{2}$$

Gyllene snittet

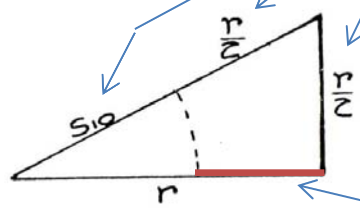


Fig. 38. Konstruktion av S_{10}

Av detta framgår, hur s_{10} kan konstrueras (fig. 38). Första termen i högra ledet är enligt Pytagoras sats hypotenusan i en rätvinklig triangel med r och $\frac{r}{2}$ som kateter. (Fäller vi ned i fig. 38 s_{10} på r, blir r enligt **(17.7)** delad så, att ***den ena delen är medelproportional till hela linjen och den andra delen***, vilket kallas delning i ”***gyllene snittet***”) $(r - s_{10})$ - *markerad* ***röd***.

Värdet på s_{10} får efter hyfsning formen $s_{10} = \frac{r}{2}\left(\sqrt{5} - 1\right)$

För att ur detta beräkna s_5 kan vi använda de båda ekvationerna $s_5 = 2r\sin(36^\circ)$ och $s_{10}^2 = 2r^2\left(1 - \cos(36^\circ)\right)$; [6], se beräkningen av s_{16} ur s_8.
Man får

$$s_5 = \frac{r}{2}\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}$$

Till de nämnda grupperna av regelbundna månghörningar, som kan rent geometriskt konstrueras, lägger vi ännu en grupp med n-värdena 15, 30, 60 . . . . Då grundtriangeln i 15-hörningen har spetsvinkeln 24° = 60° - 36°, inser vi, hur konstruktionen utförs. Det exakta uttrycket på s_{15} kan vi få ur $s_{15} = 2r\sin(12^\circ) = 2r\sin(30^\circ - 18^\circ)$. Längre fram, se under ”Trigonometriska formler”, visas, att $\sin(30^\circ - 18^\circ) = \sin(30^\circ)\cdot\cos(18^\circ) - \cos(30^\circ)\cdot\sin(18^\circ)$. [7] Det exakta värdet på $\sin(18^\circ)$ får vi ur $s_{10} = 2r\sin(18^\circ)$, som ger $\sin(18^\circ) = \frac{\sqrt{5} - 1}{4}$. Vi får nu $\cos(18^\circ) = \frac{\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}{4}$. Då $\sin(30^\circ) = \frac{1}{2}$ och $\cos(30^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2}$, blir

$$s_{15} = \frac{r}{4}\left(\sqrt{10 + 2\sqrt{5}} - \sqrt{15} + \sqrt{3}\right)$$

Ex. 206. En regelbunden 8-hörning och en kvadrat är inskrivna i samma cirkel. Sök förhållandet mellan deras areor samt mellan deras omkrets.

Svar: Areorna $\sqrt{2} \approx 1.414$, Omkretsarna $\sqrt{4 - 2\sqrt{2}} \approx 1.082$.

Ex. 207. I en cirkel med radien r är en regelbunden n-hörning inskriven. Visa att för dess diagonaler, i ordning från den minsta, gäller de med uttrycket för s_n analoga uttrycken

$$2r\sin\left(\frac{2\cdot 180^\circ}{n}\right),\ 2r\sin\left(\frac{3\cdot 180^\circ}{n}\right),\ 2r\sin\left(\frac{4\cdot 180^\circ}{n}\right),\ \text{o.s.v.}$$

---

[6] $36^\circ = \frac{\pi}{5}$ eller $= \frac{2\pi}{10} = \frac{360^\circ}{10}$.

[7] Se **(20.4) sid 247.**

Trigonometriska formler

20.1 Additionsformlerna

Om man känner de trigonometriska funktionerna för två godtyckliga vinklar α och β, kan man, såsom vi nu skall visa, beräkna funktionsvärdena för (α + β) och (α – β). (I föregående kap. har vi visat, hur detta kan ske, när α eller β är en mångfald av 90°.)

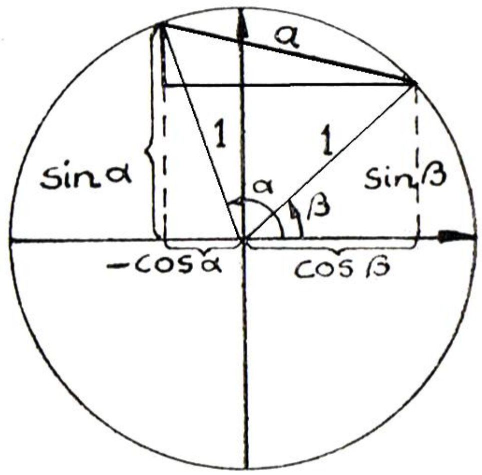


Fig. 45. Additionsformlerna

Vi börjar med en formel för $\cos(\alpha-\beta)$. Ur denna grundformel kommer vi att härleda övriga formler i detta kap. Den i fig. 45 med *a* betecknade sträckan ingår dels som sida i en triangel, där de båda övriga sidorna är = 1 och deras mellanliggande vinkel α – β, dels som hypotenusa i en rätvinklig triangel, där kateterna är $\sin(\alpha)-\sin(\beta)$ och $\cos(\beta)-\cos(\alpha)$. (Obs., att $\cos(\alpha)$ är neg., varför längden av motsvarande sträcka är $-\cos(\alpha)$.) Med hjälp av cosinusteoremet och Pytagoras sats får vi på *a*:s kvadrat två uttryck, som vi sätter lika. Alltså:

$$1+1-2\cos(\alpha-\beta)=(\sin(\alpha)-\sin(\beta))^2+(\cos(\beta)-\cos(\alpha))^2.$$

Utvecklar man kvadraterna och tillämpar sambandet (**12.5** sid. **176**), får vi efter förenkling

(20.1) $$\mathbf{\cos(\alpha-\beta)=\cos(\alpha)\cdot\cos(\beta)+\sin(\alpha)\cdot\sin(\beta)}$$

På analogt sätt kan man visa, att formel (**20.1**) gäller, för vilka värden (positivt eller negativt) α och β än har.

Byter vi ut β i (**20.1**) mot – β, får vi $\cos(\alpha+\beta)=\cos(\alpha)\cdot\cos(-\beta)+\sin(\alpha)\cdot\sin(-\beta)$ eller enligt (**19.2** sid. **247**)

(20.2) $$\mathbf{\cos(\alpha+\beta)=\cos(\alpha)\cdot\cos(\beta)-\sin(\alpha)\cdot\sin(\beta)}$$

För att ur (**20.1**) få en formel för $\sin(\alpha+\beta)$ byter vi α mot $(90^\circ-\alpha)$ och får

$$\cos(90^\circ-(\alpha+\beta))=\cos(90^\circ-\alpha)\cdot\cos(\beta)+\sin(90^\circ-\alpha)\cdot\sin(\beta)$$ eller

(20.3) $$\mathbf{\sin(\alpha+\beta)=\sin(\alpha)\cdot\cos(\beta)+\cos(\alpha)\cdot\sin(\beta)}$$

Genom att i denna formel byta ut β mot $-\beta$ får vi

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin(\alpha)\cdot\cos(-\beta)+\cos(\alpha)\cdot\sin(-\beta)$$ eller

(20.4) $$\mathbf{\sin(\alpha-\beta)=\sin(\alpha)\cdot\cos(\beta)-\cos(\alpha)\cdot\sin(\beta)}$$

Då $\tan(\alpha+\beta) = \dfrac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}$, får vi av **(20.3)** och **(20.2)**

$$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\sin(\alpha)\cdot\cos(\beta) + \cos(\alpha)\cdot\sin(\beta)}{\cos(\alpha)\cdot\cos(\beta) - \sin(\alpha)\cdot\sin(\beta)}$$

eller, efter division av varje term i täljaren och nämnaren med $\cos(\alpha)\cdot\cos(\beta)$,

(20.5) $$\mathbf{\tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan(\alpha) + \tan(\beta)}{1 - \tan(\alpha)\cdot\tan(\beta)}}$$

På analogt sätt, eller genom att i **(20.5)** byta ut β mot $-\beta$, får vi

(20.6) $$\mathbf{\tan(\alpha-\beta) = \frac{\tan(\alpha) - \tan(\beta)}{1 + \tan(\alpha)\cdot\tan(\beta)}}$$

Ex. 231. Beräkna utav de exakta funktionsvärdena för 30° och 45° a) $\cos(15^\circ)$,
b) $\cot(75^\circ)$.

Svar: a) $\frac{1}{4}\cdot(\sqrt{6} + \sqrt{2})$ b) $2 - \sqrt{3}$;

Ex. 232. Förenkla a) $\sin(60^\circ + \alpha) - \sin(60^\circ - \alpha)$, b) $\dfrac{\tan(\alpha) + \tan(\beta)}{\tan(\alpha) - \tan(\beta)}$.

Svar: a) $\sin(\alpha)$; b) $\dfrac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin(\alpha-\beta)}$;

20.2 Formlerna för dubbla vinkeln

Känner man de trigonometriska funktionerna för en vinkel α, kan man beräkna funktionsvärdena för 2α (liksom även för 3α, 4α . . .)

En formel för 2α får vi om vi i **(20.3)** sätter β = α. Då får vi:

(20.7) $$\mathbf{\sin(2\alpha) = 2\sin(\alpha)\cdot\cos(\alpha)}$$

Sätter vi i **(20.2)** β = α, får man en formel för $\cos(2\alpha)$, vilken kan skrivas om med hjälp av **((12.5** sid. **176**). Vi får då:

(20.8a) $$\mathbf{\cos(2\alpha) = \cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha)}$$

(20.8b) $$\mathbf{\cos(2\alpha) = 2\cos^2(\alpha) - 1}$$

(20.8c) $$\mathbf{\cos(2\alpha) = 1 - 2\sin^2(\alpha)}$$

Formel **(20.5)** ger för $\beta = \alpha$:

(20.9) $$\mathbf{\tan(2\alpha) = \frac{2\tan(\alpha)}{1 - \tan^2(\alpha)}}$$

Ex. 233. Om $\sin(\alpha) = \frac{3}{5}$ och α ligger i andra kvadranten, bestäm exakt de trigonometriska funktionerna för 2α.

Svar: $\sin(2\alpha) = -\frac{24}{25}$; $\cos(2\alpha) = \frac{7}{25}$; $\tan(2\alpha) = -\frac{24}{7}$; $\cot(2\alpha) = -\frac{7}{24}$;

Ex. 234. Liksom $\tan(2\alpha)$ kan vi även uttrycka $\sin(2\alpha)$ och $\cos(2\alpha)$ uttryckas i $\tan(\alpha)$.

Visa, att formeln $\sin(2\alpha) = \dfrac{2\tan(\alpha)}{1 + \tan^2(\alpha)}$ och $\cos(2\alpha) = \dfrac{1 - \tan^2(\alpha)}{1 + \tan^2(\alpha)}$. – Formlerna kan erhållas ur **(20.7)** och **(20.8a)**, om man dividerar högra leden med $\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha)$ [1] samt förkorta de uppkomna bråken med $\cos^2(\alpha)$.

Ex. 235. Härled formlerna $\sin(3\alpha) = 3\sin(\alpha) - 4\sin^3(\alpha)$;

$\cos(3\alpha) = 4\cos^3(\alpha) - 3\cos(\alpha)$; $\tan(3\alpha) = \dfrac{3\tan(\alpha) - \tan^3(\alpha)}{1 - 3\tan^2(\alpha)}$ - Detta kan ske genom att man i resp. **(20.3)**, **(20.2)** och **(20.5)** sätter $\beta = 2\alpha$ samt sedan tillämpar formlerna för dubbla vinkeln.

– ------------------------------

20.3 Formlerna för halva vinkeln

Från **(20.8c)** får vi $\cos(2\alpha) = 1 - 2\sin^2(\alpha) \rightarrow \sin^2(\alpha) = \dfrac{1 - \cos(2\alpha)}{2}$ eller om α utbytes mot $\dfrac{\alpha}{2}$,

(20.10) $$\mathbf{\sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1 - \cos(\alpha)}{2}}$$

Av **(20.8b)** får vi på samma sätt

(20.11) $$\mathbf{\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1 + \cos(\alpha)}{2}}$$

Genom division av **(20.10)** med **(20.11)** får vi

[1] $\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1$

Analytisk geometri

22.1 Kägelsnitt

Det finns tre huvudtyper av kägelsnitt: Ellips, hyperbel och parabel.

- **Ellipsen** får vi om ett plan skär tvärs genom en kons mantelyta. Planet får inte skära konens symmetriaxel vinkelrätt. Det vinkelräta snittet utgörs av cirkeln, som är ett specialfall av ellipsen, där de båda brännpunkterna sammanfaller i cirkelns centrum.
- **Hyperbeln** får vi om vi har två koner, som är placerade med spetsarna mot varandra och att ett plan skär de båda mantelytorna parallellt med konernas symmetriaxel.
- En **parabel** får vi om ett plan skär en kon parallellt med generatrisen[1]

- (Röd: **Cirkel**)
- Gul: **Ellips**
- Blå: **Hyperbel**
- Grön: **Parabel**

OBS. Att planet inte i något av de tre fallen får skära den cirkulära konens spets.

Bild 96. *Kon skärs av fyra plan* [2]

”Den grafiska bilden av ekvationen $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + \mathrm{D}x + Ey + F = 0$ är en **ellips**, **parabel** eller **hyperbel** (eller i några specialfall: Ingenting alls, en punkt, en linje, parallella eller skärande linjer).”[3]

De tre kägelsnitten uppträder allteftersom uttrycket $4AC - B^2$ är **positivt**, **negativt** eller **noll**. Efter lämplig omflyttning av koordinatsystemet kan vi skriva

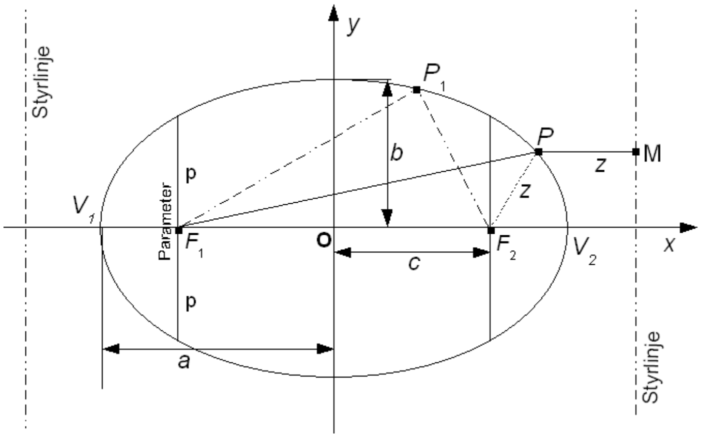
- **(22.1)** **Ellipsen** $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$
- **(22.2)** **Hyperbeln** $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$
- **(22.3)** **Parabeln** $y^2 = 4ax$

---

[1] En generatris är en linje som rör sig genom rummet och därmed bildar en yta, t.ex. mantelytan på kon eller cylinder.
[2] Bilden hämtad från: http://sv.wikipedia.org/wiki/K%C3%A4gelsnitt. OBS. Denna ellips är asymmetrisk, d.v.s. att brännpunkterna ligger på olika avstånd från centrum. $OF_1 < OF_2$.

[3] Bo Kjellberg, Högre ingenjörskurs i matematik, Hermods, Malmö.

22.2 Ellips



Avståndet $F_2P = PM$ $(z = z)$.
F_1 och F_2 är **brännpunkter**.
Storaxeln $= 2a$.
Lillaxeln $= 2b$.
Parametern är den med lillaxeln parallella **kordan** som går igenom brännpunkten F_1 respektive F_2.
Avståndet $F_1P_1 + P_1F_2 = F_1P + PF_2$, d.v.s. gäller för samtliga punkter utmed ellipsen.

Bild 97. *Ellips*

Storaxeln skär ellipsen i två punkter vertex[4] (V_1 och V_2).

Avståndet mellan ellipsens centrum och respektive brännpunkt är ***c***.
Vi får sambandet $c^2 = a^2 - b^2$

(22.1) **Ellipsen** $$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Excentriciteten[5] ***e*** för ellipsen definieras som:

(22.4) $$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} = \frac{2b}{a} = \sqrt{1 - \left(\frac{b}{a}\right)^2} \qquad 0 < e < 1$$

Parameterns längd definieras som:

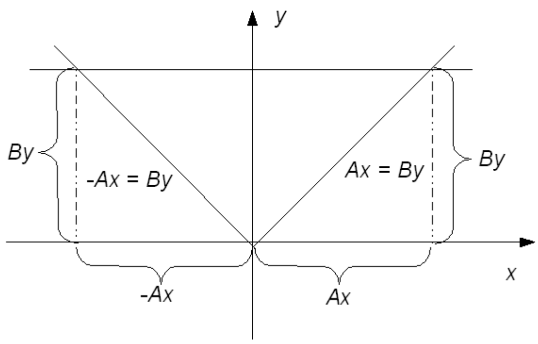
(22.5) $$2p = \frac{2b^2}{a} = \frac{2b}{a}\sqrt{a^2 - c^2}$$

Om ellipsens centrum ligger utanför origo i punkten (x_1, y_1) blir ellipsens ekvation:

(22.6) $$\frac{(x - x_1)^2}{a^2} + \frac{(y - y_1)^2}{b^2} = 1$$

OBS. Varje diameter i ellipsen går genom origo enligt definitionen av densamma.

[4] Vertex är kurvans höjdpunkt sett från centrum (origo).
[5] $e < 1$.



En linjes ekvation kan skrivas som $Ax = By$ eller $Ax - By = 0$. (Kurvan är stigande).
Dess **konjugat**, d.v.s. den mot densamma vinkelräta linjen skrivs som $Bx = -Ay$ eller $Bx + Ay = 0$. (Kurvan är fallande).
Om vinklarna mot x-axeln = 45°, är $A = B$.

Bild 98. *Linjens ekvation*

Ex. 281. En korda i ellipsen $5\,v^2 + 9\,y^2 = 45$ går genom parameterns ändpunkt i första kvadranten. Vilken är ekvationen för kordan, om den halveras av diametern.

Svar: $5\,x + 3\,y - 15 = 0$

Ex. 282. I ellipsen $3\,x^2 + 4\,y^2 = 6$ drar vi kordor parallella med linjen $3\,x - 2\,y + 6 = 0$. Bestäm ekvationen för den diameter, som halverar dessa kordor. Ange även konjugatdiameterns[6] ekvation.

Svar: $2\,x + 3\,y = 0$, $3\,x - 2\,y = 0$

Ex. 283. I ellipsen $16\,x^2 + 25\,y^2 = 100$ går en korda genom ena brännpunkten och kurvans ena skärningspunkt med y-axeln. Bestäm vinkeln mellan den diameter, som halverar denna korda, och dess konjugatdiameter.

Svar: $101.2°$; $(78.8°)$

Ex. 284. Genom punkten (x_1, y_1) på ellipsen $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ drar vi en diameter. Sök koordinaterna för konjugatdiameterns ändpunkter.

Svar: $\left(\frac{a\,y_1}{b}, -\frac{b\,x_1}{a}\right)$ och $\left(-\frac{a\,y_1}{b}, \frac{b\,x_1}{a}\right)$

Ex. 285. Två konjugatdiametrar till ellipsen $b^2\,x^2 + a^2\,y^2 = a^2\,b^2$ har längderna $2\,d_1$ och $2\,d_2$. Visa att $d_1^2 + d_2^2 = a^2 + b^2$.

[6] Den är vinkelrät mot den sökta diametern.

22.3 Hyperbel

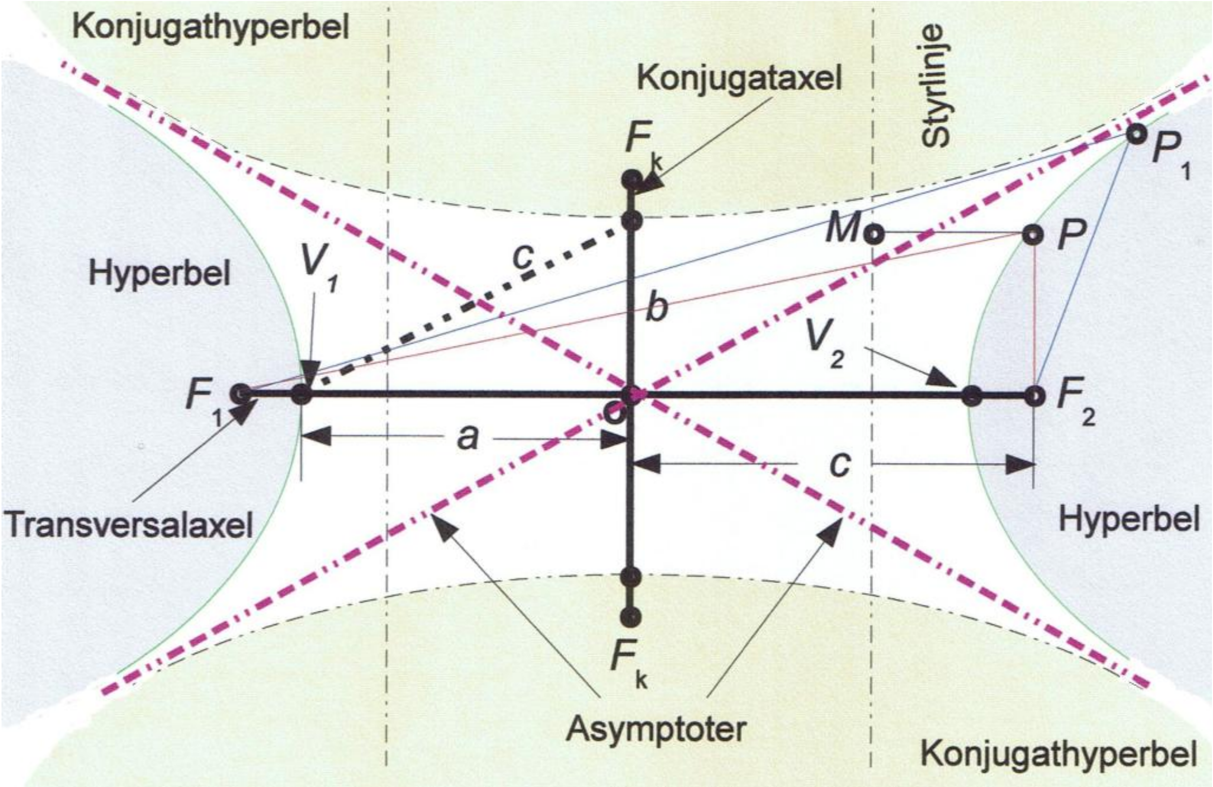


Bild 99. Hyperbel

Bild 100. Hyperbel[7]

Avståndet $F_2P = PM$
F_1 och F_2 är **brännpunkter**.
Transversalaxeln $= 2a$. Konjugataxeln $= 2b$.
Transversalaxeln skär hyperbeln i två punkter vertex (V_1 och V_2).
Avståndet till vertex från centrum är a.
OBS! Avståndet $F_1P - PF_2 = F_1P_1 - P_1F_2$, d.v.s. differensen är konstant och gäller för samtliga punkter utmed hyperbeln.
F_k är **konjugathyperbelns** två brännpunkter.

Avståndet mellan hyperbelns centrum och respektive brännpunkt är ***c***.
Vi får sambandet $c^2 = a^2 + b^2$

(22.1) **Hyperbeln** $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

Excentriciteten[8] ***e*** för hyperbeln definieras som:

(22.7) $$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a} = \sqrt{1 + \left(\frac{b}{a}\right)^2} \qquad e > 1$$

[7] Bilden hämtad från: http://sv.wikipedia.org/wiki/K%C3%A4gelsnitt
[8] *e* >1.

Statistik

Statistikens fem delar

1. En klar definition av den aktuella populationen, som vi vill undersöka
2. Att utforma experimentet eller insamlingsproceduren
3. Insamling och analys av data
4. Proceduren för att göra slutledningar om hela populationen baserad på den insamlade informationen
5. Att skapa ett mått på *godhet* (tillförlitlighet) av gjorda slutsatser

Vad vill vi undersöka

1. Frågeställning – Vad vill vi ha svar på – avgränsning av undersökningsobjektet (*populationen)*.
2. Utformning av experiment eller datafångst.
3. Planering av hur data skall insamlas.

Insamling av data

1. Automatisk registrering, t.ex. i kassaterminaler för att undersöka kundernas inköpsvanor.
2. Datorbaserade kundundersökningar.
3. Intervjuer.
4. Postenkäter, etc.

Sammanställa data

1. Tabeller
2. Diagram, etc.

24.1 Tolka data

Linjediagram

Ex. 307. En av mina lärare i matematik utförde, som åtta-åring, Georges-Louis Leclerc, greve av Buffon (1707-1788) nålexperiment för att erhålla ett närmevärde på π. Experimentet gick till så, att han släppte nålar på ett brädgolv. Nålarna var lika långa (L) som golvtiljornas bredd. Nålen släpptes på ett avstånd (d) över golvet, som var större än golvtiljornas bredd. Sannolikheten (P) för att nålarna skall korsa en gränslinje mellan två tiljor är här $P = 2\ L\ /\ \boldsymbol{\pi}\ d$. För att minska antalet kast använde han 10 nålar åt gången. Efter 1 200 kast fick han följande resultat:

Släppta nålar (n)	På linjen (m)	$\pi \approx \frac{2n}{m}$
10	5	4,00000
100	62	3,22581
1 000	634	3,15457
3 000	1 910	3,14136
5 000	3 183	3,14169
7 000	4 456	3,14183
9 000	5 730	3,14136
10 000	6 366	3,14169
12 000	7 640	3,14136

Tabell 12*. Slumpförsök med nålar*

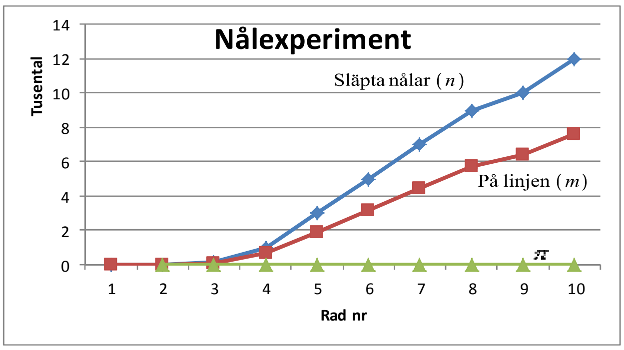


Diagram 2. *Slumpförsök med nålar*

Om vi granskar tabell 12 från 7 000 nålar

	a	b	c	d
Pi	3,14183	3,14136	3,14169	3,14136
Nålar (1 000-tal)	7	9	10	12

***Tabell 13**. Slumpförsök med nålar*

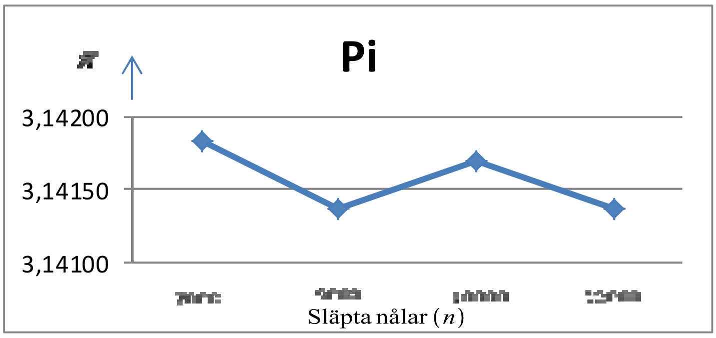


***Diagram 3.** Slumpförsök med nålar*

Vi finner nu att pi-värdet orsolerar[1] mellan kolumn b och d och vi får följande tabellvärden:

e	f	g	h
$\frac{c+d}{2}$	π	$\mathrm{e}-\mathrm{f}$	$\frac{g}{f}$
3,141525743	3,141592654	-0,000066911	-2,04536735E-05

***Tabell 14**. Slumpförsök med nålar*

Vi kan nu se att resultatet går mot ett närmevärde på π och vi får ett värde med ett fel på

$$-\frac{0.000066911}{3.141592654}\cdot 100 \approx -0.002\ \%$$

Stapeldiagram

Ex. 308. Från 2008 till 2009 ökade invånarantalet i Storgöteborg med 11 300 personer, och beräknas passera en miljon invånare 2017.

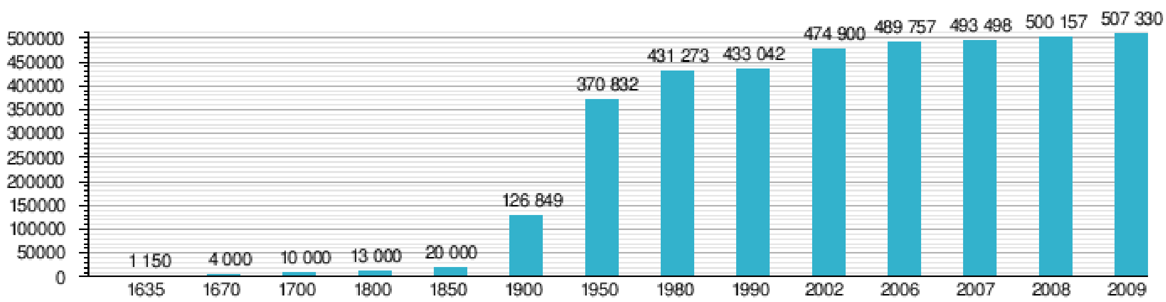


***Diagram 4.** Innevånarantalet i Göteborg*[2]

[1] Växlar mellan två värden.
[2] Källor: 1635, 1850 och1900, övriga årtal från SCB.

a) Hur stor var ökningen från år 1635 till 1700?
b) Hur stor var ökningen i procent från år 1700 till 1800?
c) Hur stor var ökningen i procent från år 1900 till 2000?

Svar a) 8 850 personer ; b) 30 % ; c) 269 %.

Ex. 309. Nederbörd

	Jan	Feb	Mar	Apr	Maj	Jun	Jul	Aug	Sep	Okt	Nov	Dec
1931-1960	57	35	29	40	35	57	78	85	78	69	66	63
1961-1990	62	41	50	42	51	61	77	68	81	84	84	75
2003	82	40	35	77	91	80	101	86	32	112	84	89

***Tabell 15.** Nederbörd i mm*

a) Hur stor är ökningen/minskningen i mm månad för månad från genomsnittet åren 1931-1960 jämfört med år 2003 ? Visa detta i ett diagram.
b) Vilken månad hade största ökningen?
c) Vilken månad hade största minskningen?
d) Visa ökningen för genomsnitt åren för år 1961-1990 till år 2003.

Ex. 310. En skoaffär hade ett lager på en skomodell enligt nedan.

Kolumn	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
Storlek	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46
Antal	2	4	6	8	14	20	26	28	27	25	23	15	2

Tabell 16. *Antal per storlek.*

a) Visa frekvensen av de olika storlekarna i ett stapeldiagram.
b) Hur många procent av lagret utgjorde storlek 41 och 42 tillsammans?
c) Ange medelantalet per storlek.

Cirkeldiagram

Av fem sorters pasta (A – E) hade en matvaruaffär följande antal i lager. Fördelningen visas i cirkeldiagrammet nedan.

Sort	Antal
A	50
B	30
C	10
D	5
E	5
Summa	100

Tabell 17. *Antal per pastasort*

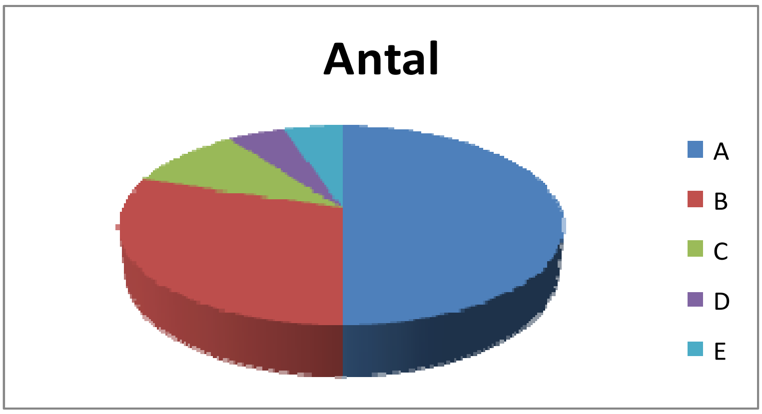


Diagram 5. *Pastasort i lager % - fördelning*

Ex. 311. Dygnets användning var för en person:
1. Sömn 8 h.
2. Morgon 1.5 h.
3. Arbetsresor 1 h.
4. Arbete 8 h.
5. Lunch, middag 1 h.
6. Övrigt 4.5 h.

Rita ett cirkeldiagram.

Histogram[3]

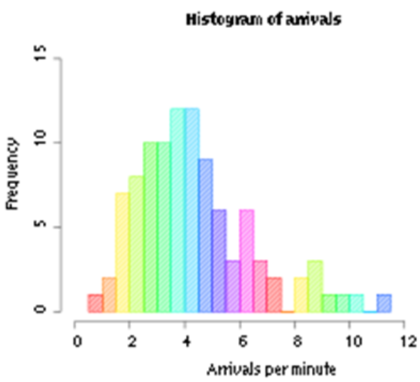


Diagram 6. *Histogram*

Histogram är en grafisk framställning av tabulära mätdata (klassindelat material) där den axel som motsvarar definitionsmängden (vanligen den horisontella x-axeln) är indelad i jämna intervall. Höjden av en stapel motsvarar mätvärdestätheten i motsvarande intervall och arean av varje stapel motsvarar därmed antalet mätvärden.

Då det slutliga histogrammet erhållits så motsvarar arean under hela grafen det totala antalet gjorda observationer. Om klassbredderna görs mycket små (limes → 0) övergår histogrammet till funktionens integral.

Ex. 312. I en klass kom eleverna från fem olika stadsdelar.

Stadsdel	A	B	C	D	E
Elevantal	2	4	9	8	6

Tabell 18. Elevantal per stadsdel

Rita upp ett histogram som belyser klassens sammansättning.

24.2 Lägesmått

Medelvärde

I ett slumpvis uttaget fotbollslag bland klubbens alla spelare vägde de:

Spelare nr (i)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	Summa
Vikt i kg (y_i)	65	67	69	71	73	75	77	79	81	83	85	825

Tabell 19. Spelarvikt

[3] http://sv.wikipedia.org/wiki/Histogram

Vi har här $y_1, y_2, y_3, \ldots, y_n$ eller 65, 67, 69, . . . , 85 som ger

$$(24.1) \qquad \bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i}{n} = \frac{825}{11} = 75 \text{ kg}$$ Se sid 343.

Median

Vid udda tal är medianen tal nr $\frac{n+1}{2}$ som här är $\frac{11+1}{2} = 6,$ d.v.s. den sjätte vikten som är 75 kg. Inkluderar vi summan i talserien får vi 12, ett jämnt tal, och medianen blir då medelsumman av två tal. Här får vi addera medeltalet av de båda talen nr $\frac{n}{2}$ och $\left(\frac{n}{2} + 1\right)$ som här är vikterna nr **6** och **7**,

d.v.s. $\frac{75 + 77}{2} = 76$ kg.

Klassindelar vi fotbollsspelarnas vikt kan vi få denna tabell:

Klass i	*Klass gränser*	*Avprickade*	*Klass-frekvens f_i*	*Klass-relativ frekvens*
1	65-69	|||	3	3 / 11
2	70-74	||	2	2 / 11
3	75-79	|||	3	3 / 11
4	80-84	||	2	2 / 11
5	85-89	|	1	1 / 11
Totalt			11	1

Tabell 20. Spelarvikt frekvens per klass

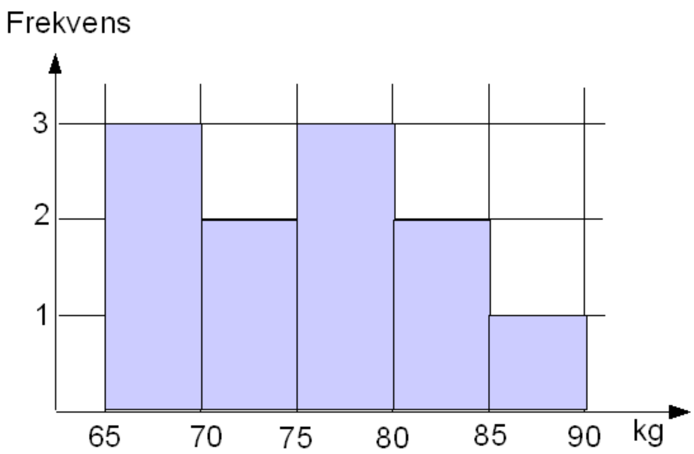


Diagram 7. Frekvens per viksklass (histogram)