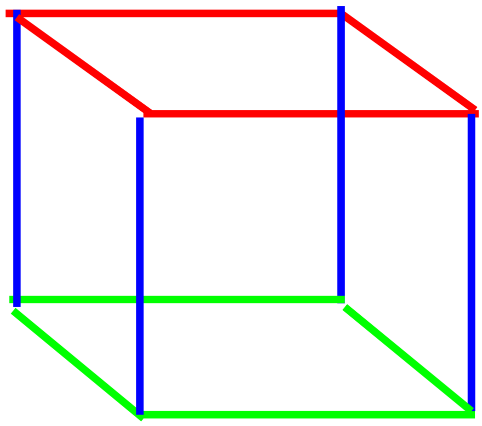
HÄRLEDNINGAR

TRE KOMPENDIER
I
MATEMATIK

KOMPENDIER FÖR BREDVIDLÄSNING TILL LÄROBOK I GYMNASIETS MATEMATIK

Fritt efter
Sigurd Eriksson
”Matematik del I-II”



bearbetad av
Lennart Gombrii

Innehållsförteckning

1 Trigonometriska funktioner

1.1 Inledning

Anledningen till att jag framställde detta kompendium är att jag fann läroboken[1] utmärkt i detta avsnitt, men ville koncentrera härledningarna i detta kompendium.

Här i Fässberggymnasiet (Mölndal) undervisade jag i matematik A och B under läsåret 2002 - 03. Emellertid hade jag fått en elev som läste matematik D. För att underlätta dennes studier, påbörjades detta arbete samt kompendierna:

- 2 Begreppet derivata
- 3 Differentialer och begreppet integral samt integralberäkningar.

Kompendierna bygger på Sigurd Eriksson *Matematik I & II.* För intresserade av gymnasiets matematik kan jag varmt rekommendera nyutgåvan av Sigurd Eriksson, Matematik del I och II.[2].

1.2 Kompendium

Jag har här, utöver lärobokens formelpresentation, bifogat tre triangelsatser:

- Ariateoremet – beräkning av triangelns area
- Herons formel – beräknar triangelns area.
- Den i en triangel inskrivna cirkelns radie

Bland de trigonometriska sambanden saknar jag i läroboken:

- Formel för halva vinkeln.
- Summationsformlerna.

[1] Matematik 2000 – Kurs CD lärobok.
[2] Se RFGK's hemsida: www.rfgk.se.

1.3 Definitioner

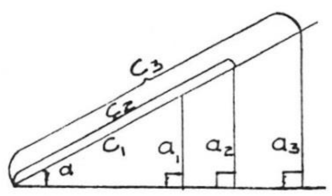


Fig. 1

Om man från godtyckliga punkter på det ena benet av den spetsiga vinkeln α i fig. 1 drar mot det andra benet vinkelräta linjer a_1, a_2, a_3.... Blir på grund av de uppkomna rätvinkliga trianglarnas likformighet:

$$\boxed{\frac{a_1}{c_1} = \frac{a_2}{c_2} = \frac{a_3}{c_3} = \cdots}$$

Detta konstanta förhållande benämns sinus för α och tecknas sinα.

Man säger att sinα, som tydligen är beroende av (en funktion av) vinkeln α, m a o sinα utgör en **trigonometrisk funktion av** α.

De trigonometriska funktionerna definieras ur en rätvinklig triangel (fig. 2) på följande sätt:

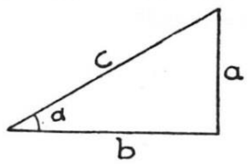


Fig. 2

$\boxed{\sin\alpha = \frac{a}{c}}$ (motstående katet genom hypotenusan)

$\boxed{\cos\alpha = \frac{b}{c}}$ (närliggande katet genom hypotenusan)

$\boxed{\tan\alpha = \frac{a}{b}}$ (motstående katet genom närliggande katet)

$\boxed{\cot\alpha = \frac{b}{a}}$ (närliggande katet genom motstående katet)

Av fig. 2 framgår att:

(1) sin(90-α) = cosα ; **(2)** cos(90-α) = sinα ; **(3)** tanα(90-α) = cotα ;
(4) cotα(90-α) = tanα .

OBS! $\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{a * \cancel{c}}{\cancel{c} * b} = \frac{a}{b}$ där cosα ≠ 0 , d v s α får ej vara 90° eller (90° + n • 180°)

$$\cot\alpha = \frac{1}{\tan\alpha} = \frac{\cancel{c} * b}{a * \cancel{c}} = \frac{b}{a}$$

Enligt Pytagoras sats är: $\boxed{c^2 = a^2 + b^2}$ (**5**). Divideras båda leden med c^2 erhåller vi:

$\boxed{1 = \frac{a^2}{c^2} + \frac{b^2}{c^2}}$ (**6**). ⟶ $\boxed{1 = \frac{a}{c} * \frac{a}{c} + \frac{b}{c} * \frac{b}{c}}$ (**7**).⟶ $\boxed{1 = \sin^2\alpha + \cos^2\alpha}$ (**8**).

OBS! De båda vinklarna α och (90° - α) är komplementvinklar. Märk, att orden cosinus och cotangens är förkortningar av ”complementes sinus” och ”complementes tangens”.

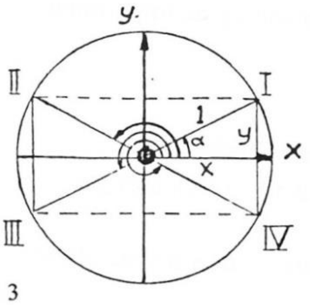


Fig. 3

$$\boxed{\sin(180^\circ - \alpha) = \sin\alpha} \quad \textbf{(9)}$$

$$\boxed{\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos\alpha} \quad \textbf{(10)}$$

$$\boxed{\tan(180^\circ - \alpha) = -\tan\alpha} \quad \textbf{(11)}$$

$$\boxed{\cot(180^\circ - \alpha) = -\cot\alpha} \quad \textbf{(12)}$$

I fig. 3 ser vi att: $\sin\alpha = \dfrac{y}{1} = y$; $\cos\alpha = \dfrac{x}{1} = x$, $\tan\alpha = \dfrac{y}{x}$ där $x \neq 0$ och

$\cot\alpha = \dfrac{x}{y}$ där $y \neq 0$.

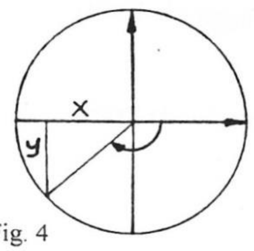


Fig. 4

Vid omkastning av vridningsvinkeln (till medurs riktning) får vi negativa vinklar.
$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$ (**13**); $\cos(-\alpha) = \cos\alpha$ (**14**); $\tan\alpha = -\tan\alpha$ (**15**) och $\cot(-\alpha) = -\cot\alpha$ (**16**).

Sinus och cosinus återkommer med en periodicitet på 360° samt tangens och cotangens återkommer med en periodicitet på 180°.

Vi kan teckna:
$\sin(\alpha + n \cdot 360°) = \sin\alpha$; (n = ett heltal) ; $\cos(\alpha + n \cdot 360°) = \cos\alpha$; (n = ett heltal).

$\tan(\alpha + n * 180^\circ) = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$; $\alpha \neq (90° + n \cdot 180°)$; (n = ett heltal).

$\cot(\alpha + n * 180^\circ) = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$; $\alpha \neq (0° + n \cdot 180°)$; (n = ett heltal).

1.4 Sinusteoremet

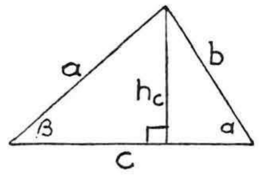


Fig.5

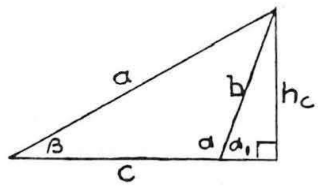


Fig. 6

(17) $a * \sin(\beta) = b * \sin(\alpha) \rightarrow$

(18) $a * \frac{h_c}{a} = b * \frac{h_c}{b} \rightarrow$

(19) $h_c = h_c$

Men (17) kan skrivas:

(20) $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta}$

Men eftersom sin(180° - α) = sinα , så är här $\sin\alpha_1 = \sin\alpha$, och vi finner då att (17) även gäller för en trubbig vinkel, m a o:

$$a * \sin(\beta) = b * \sin(\alpha) \rightarrow$$

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta}$$

Vi kan även visa att:

(21) $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\chi}$

"I varje triangel är sidorna proportionella mot de motstående vinklarnas sinus"

Då i såväl fig. 5 och fig. 6: $\boxed{h_c = b\sin(\alpha)}$ **(22)**, och triangelarean **(T)** är $\boxed{T = \frac{c \cdot h_c}{2}}$ **(23),**

Så om vi ersätter h_c i **(23)** med $b\sin\alpha$ från **(22)**, erhålles:

$$T = \frac{b\,c\sin(\alpha)}{2} = \frac{a\,c\sin(\beta)}{2} = \frac{a\,b\sin(\gamma)}{2}$$

2 Begreppet derivata

2.1 Derivatans geometriska betydelse

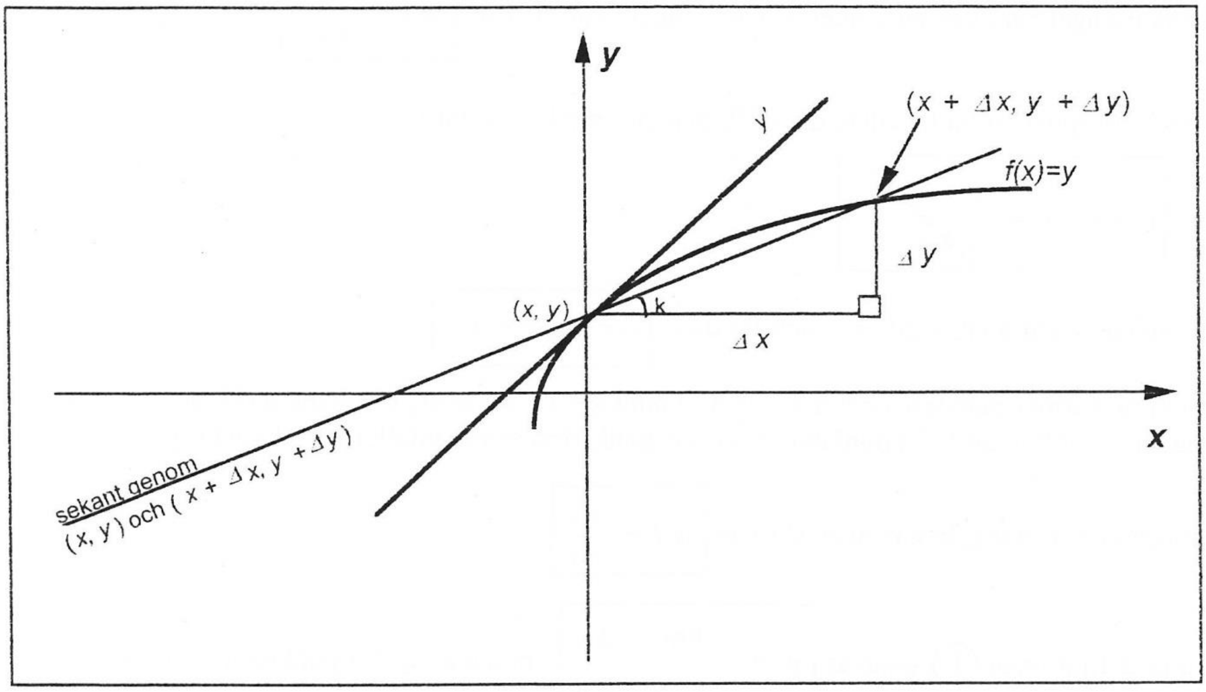


Fig 1

Om $\boxed{y = f(x)}$ *; kallar man* ***gränsvärdet*** $\boxed{\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}}$ *för derivatan av* y *med avseende på* x.

Punkten (x, y) i fig. 1 kan placeras godtyckligt på kurvan $f(x)$.

Namnet derivata på $\boxed{\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}}$ antyder, att detta gränsvärde utgör en av y härledd

$$\text{Def.:} \quad \boxed{y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}} \qquad (1)$$

Om vi är vid punkten (x, y) i fig. 1 på kurvan $f(x)$ och drar en linje från (x, y), till en annan punkt på kurvan $f(x)$, nämligen punkten $(x + \Delta x, y + \Delta y)$, får vi en sekant till kurvan $f(x)$, som går genom dessa två punkter på kurvan. Vi bildar nu en rätvinklig triangel med kateterna Δx och Δy samt med sin hypotenusa sammanfallande med sekanten.

Denna triangel har även en vinkel k vars triangel kan skrivas $\tan(k) = \frac{\Delta y}{\Delta x}$

Om vi nu multiplicerar båda leden, d.v.s. VL och HL, med Δx får vi:

$$\tan(k) \cdot \Delta x = \frac{\Delta y \cdot \Delta x}{\Delta x} .$$

Vi kan förkorta HL med Δx och får då[1]: $\Delta y = \tan(k) \cdot \Delta x$

Om vi nu närmar punkten $(x + \Delta x, y + \Delta y)$ till punkten (x, y) övergår sekanten slutligen till en tangent y' till kurvan $f(x)$, när punkten sammanfaller i punkten (x, y).

Tangenten till kurvan kan även skrivas $\tan(k) = \frac{\Delta y}{\Delta x}$, m.a.o. är $\tan(k)$ i punkten (x, y) lika med y'. Enligt definitionen 1 ovan är $y' = \left(\lim_{\Delta x \to 0}\right) \frac{\Delta y}{\Delta x}$, m.a.o. är $\tan(k)$ i punkten (x, y) lika med y'. Alltså: $y' = \tan(k)$.

y' är alltså gränsvärdet, d v s lutningen på tangenten till kurvan $f(x)$ i punkten (x, y) då Δx och även Δy går mot noll. [Triangeln blir ju mindre och mindre, då den övre punkten $(x + \Delta x, y + \Delta y)$ närmar sig punkten (x, y)].

Derivatan y' är alltså lika med $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, som närmar sig noll, när $\Delta x \to 0$.

Kvoten $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ är till synes ett obestämt tal (division med noll), men rätt hanterat finner vi, att vi kan få *ett reellt uttryck* vid limusövergången.

Exempel 1: Derivatan av funktionen $y = x^3 - 3x$ 2

i punkten (x, y) är då: $y + \Delta y = (x + \Delta x)^3 - 3(x + \Delta x) \rightarrow$

$$\rightarrow \boxed{y + \Delta y = (x + \Delta x) \cdot (x + \Delta x) \cdot (x + \Delta x) - 3(x + \Delta x)} \rightarrow$$

$$\rightarrow \boxed{y + \Delta y = (x + \Delta x) \cdot \left(x^2 + 2x \cdot \Delta x + \Delta x^2\right) - 3x - 3\Delta x} \rightarrow$$

[1]Efter omkastning av VL och HL.

$$y + \Delta y = x^3 + 3x^2 * \Delta x + 3x * (\Delta x)^2 + (\Delta x)^3 - 3x - 3\Delta x$$ (3)

Om vi nu ersätter ***y*** i (3) med $x^3 - 3x$ från (2) erhåller vi:

$$x^3 - 3x + \Delta y = x^3 + 3x^2 * \Delta x + 3x * (\Delta x)^2 + (\Delta x)^3 - 3x - 3\Delta x \rightarrow$$

$$\Delta y = \cancel{x^3 - x^3} + 3x^2 * \Delta x + 3x * (\Delta x)^2 + (\Delta x)^3 - \cancel{3x + 3x} - 3\Delta x \rightarrow$$

$$\Delta y = 3x^2 * \Delta x - 3\Delta x + 3x * (\Delta x)^2 + (\Delta x)^3$$

Dividerar vi nu VL och HL med Δx erhåller vi:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{3x^2 * \cancel{\Delta x}}{\cancel{\Delta x}} - \frac{3\cancel{\Delta x}}{\cancel{\Delta x}} + \frac{3x * (\Delta x)^{\cancel{2}}}{\cancel{\Delta x}} + \frac{(\Delta x)^{\cancel{3}}}{\cancel{\Delta x}} \rightarrow$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 3x^2 - 3 + 3x * \Delta x + (\Delta x)^2$$ (4)

Om vi kombinerar (1) och (4) när $\Delta x \rightarrow 0$ erhåller vi:

$$y' = 3x^2 - 3 + 3x * 0 + 0 * 0 \rightarrow$$

$$y' = 3x^2 - 3$$ eller (5)

$$y' = 3x^{3-1} - 1 * 3x^{1-1} \rightarrow y' = 3x^2 - 1 * 3x^0 \rightarrow y' = 3x^2 - 1 * 3 * 1 \rightarrow$$

$$y' = 3x^2 - 3$$

M a o, om $\boxed{y = x^3 - 3x}$ så är dess derivata $\boxed{y' = 3x^2 - 3}$

Av (4) och (5) ovan kan vi se, att man alltid måste eliminera Δx i nämnaren i HL[2] innan låter $\Delta \mathbf{x} \rightarrow \mathbf{0}$. Gränsvärdet, d v s lutningen hos tangenten till kurvan $f(x)$ i punkten (x, y) är *ej* något obestämt. Det hela blir ju helt obegripligt, om Δx står i nämnaren när $\Delta x \rightarrow 0$, eller som i läroboken[3] när $h \rightarrow 0$, samtidigt som h står i nämnaren.

Av vad som anförts ovan beträffande en kroklinjes stigning framgår, *att derivatan geometriskt betyder stigningen hos funktionen* $f(x)$.

[2] HL = ekvationens högra led.

[3] Matematik 2000, kurs CD sid 51.

Med kännedom om derivatan av en funktion kan man därför beräkna funktionskurvans stigning i olika punkter (x, y).

- En positiv derivata anger, att kurvan är stigande (funktionen växande).
- En negativ derivata betyder, att kurvan är fallande (funktionen avtagande).
- Att derivatan är 0 innebär, att kurvans tangent går parallellt med x-axeln (horisontellt).
- Ju större derivatans numeriska värde är, desto hastigare växer (eller avtager) funktionen och desto mer vertikalt förlöper kurvan.
- Ju mindre det numeriska värdet är, desto långsammare växer (eller avtager) funktionen och desto mer horisontellt förlöper kurvan.
- En konstant derivata anger, att kurvan är en rät linje, d v s funktionen är linjär.

Exempel 2:

a) Bestäm var funktionen i ex. 1 har horisontell tangent, varest den är stigande eller fallande, samt

b) Ange stigning (och stigningsvinkel) i de punkter, där kurvan skär x-axeln.

a) Sätt $\boxed{y' = 0} \rightarrow \boxed{0 = 3x^2 - 3} \rightarrow \boxed{3x^2 = 3} \rightarrow \boxed{x^2 = 1} \rightarrow \boxed{x = \pm\sqrt{1}} \rightarrow$

$\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = -1 \end{cases}$ Insättes x-värdena i ekvation (2) $\boxed{y = x^3 - 3x}$ kan vi beräkna y-värdena.

Vi får då för: $\boxed{x_1 = 1}$ $y_1 = 1^3 - 3 * 1 = 1 - 3 = \mathbf{-2}$

$\boxed{x_2 = -1}$ $y_2 = (-1)^3 - 3 * (-1) = -1 + 3 = \mathbf{2}$

Svar a): Kurvan är horisontell i punkterna: $\begin{cases} x_1 = 1 \\ y_1 = -2 \end{cases}$ $\begin{cases} x_2 = -1 \\ y_2 = 2 \end{cases}$

b) Sätt $\boxed{y = 0} \rightarrow \boxed{0 = x^3 - 3x} \rightarrow \boxed{x^3 = 3x} \rightarrow$ Division med $x \rightarrow \boxed{\dfrac{x^3}{x} = \dfrac{3x}{x}} \rightarrow$

$\boxed{x^2 = 3}$ och $\boxed{x_3 = 0} \rightarrow \boxed{x = \pm\sqrt{3}}$ och $\boxed{x_4 = \sqrt{3}}$ samt $\boxed{x_5 = -\sqrt{3}} \rightarrow$

$\begin{cases} x_3 = 0 \\ x_4 = \sqrt{3} \\ x_5 = -\sqrt{3} \end{cases}$ Kurvan skär x - axeln vid $\begin{cases} x_3 = 0 ; x_4 = \sqrt{3} \text{ och } x_5 = -\sqrt{3} \\ y_3 = y_4 = y_5 = 0 \end{cases}$

- Derivatan för $\boxed{x_3 = 0} \rightarrow \boxed{y'_3 = 3 * 0^2 - 3} \rightarrow \boxed{y'_3 = -3}$ och vinkeln = -71,6°

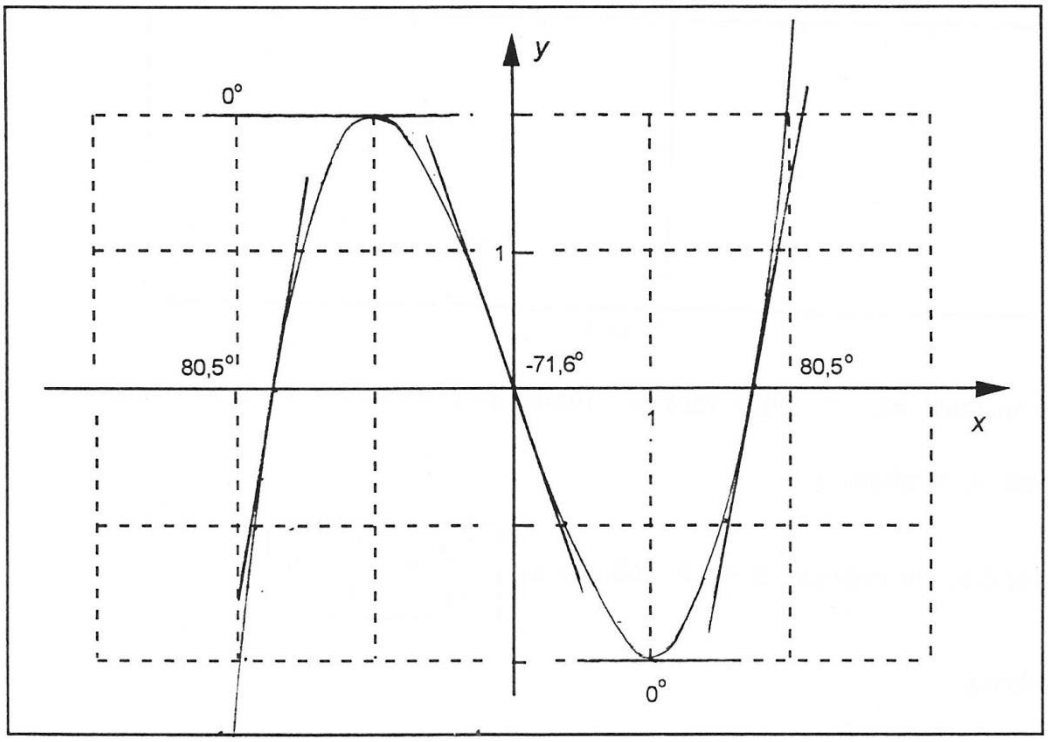


Fig. 2

3.4 Differentialer och differentiering

Den för funktionen $y = x^2$ på vanligt sätt bildade s k differentialkvoten $\Delta y/\Delta x = 2x + \Delta x$
Vi erhåller då $\Delta x \longrightarrow 0$ att $y' = 2x$. Även för en godtycklig funktion bör gälla, att:

$\Delta y/\Delta x = y' + \varepsilon$ **(1)** där ε (epsilon) $\longrightarrow 0$ när $\Delta x \longrightarrow 0$ och därmed $\Delta y/\Delta x = y'$

Värdet av ε beror av $\boldsymbol{\Delta x}$ och i allmänhet också av $\boldsymbol{x}$.

Det kan ofta vara praktiskt, att även skriva $\boldsymbol{y'}$ som en kvot, differentialkvot, av två storheter $\boldsymbol{dy}$ och $\boldsymbol{dx}$, vilka kallas differentialer av resp. $\boldsymbol{y}$ och $\boldsymbol{x}$.

Alltså: $dy/dx = y' \longrightarrow dy = y'\,dx$ **(2)**, där dx betyder ett godtyckligt tillskott i $\boldsymbol{x}$, alltså

$dx = \Delta x$. Tydligen kommer då ej dy att få motsvarande tillskott Δy i y, enär vi kan skriva (1) som $\Delta y = (y' + \varepsilon) * \Delta x = y'\Delta x + \varepsilon * \Delta x$ **(3)**

Om vi kombinerar (2) och (3), kan vi skriva $\Delta y = dy + \varepsilon * \Delta x$ **(4)**.

Vad de här ingående storheterna betyder geometriskt, visas i fig. 4.

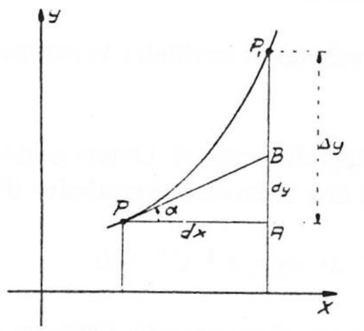


Fig. 4

Att $dy = AB$ följer av att derivatan geometriskt betyder tan α. Då $\Delta y = AP_1$, är $\varepsilon * dx = BP_1$.

Sträckan **BP$_1$** blir allt mindre, både absolut och i förhållande till ***dy***, när punkten **P$_1$** på kurvan närmar sig **P**. M a o: [$(\varepsilon * dx)/dy = \varepsilon / y' \rightarrow 0$].

Ex 1. Bestäm ***dy*** och **Δy** för funktionen $y = x^2$, om $x = 1$ och $dx = 1$; 0,1; 0,01; 0,001;
Man får $dy = 2xdx = 2$ för $x = 1$ och $dx = 1$. För $dx = 0{,}1$ blir $dy = 0{,}2$;
för $dx = 0{,}01$ blir $dy = 0{,}02$; för $dx = 0{,}001$ blir $dy = 0{,}002$; o s v.

$\Delta y = 2x\,dx + (dx)^2 = 3$; 0,21 ; 0,0201 respektive 0,002001 ; ....

Att sätta $\Delta y = dy$, vilket ofta sker i den tillämpade differentialräkningen, innebär en approximation, som gäller bättre, ju mindre $dx = \Delta x$ och därmed Δy är.

Ex 2. Beräkna (appr.) det proc. felet i $y = a * \tan x$, om $x = 30°$ och behäftat med felet:

$$\boxed{dx = 0{,}5° = \frac{\pi}{360} rad}$$

För vilket ***x*-värde** är felet i ***y*** minst? Enär derivatan av

$$\boxed{tgx = \frac{1}{\cos^2 x}}$$

blir $dy/dx = a / \cos^2 x$ (**5**) och det proc. felet blir $100 * dy / y = 100 * 2dx / \sin 2x$. (**6**)

Då $2\sin\alpha * \cos\alpha = \sin 2\alpha$ (**7**) , och att vid $\alpha = 45°$ kan (7) skrivas $2\cos^2\alpha = \sin 2\alpha \rightarrow$

$\rightarrow \cos^2\alpha = \sin 2\alpha / 2$ (**8**) . Kombinerar vi (6) och (8) får vi:

$$\boxed{100 * \frac{dy}{y} = 100 * \frac{2dx}{\sin 2\alpha} = \frac{100 * 2 * \pi}{\sin 90° * 360} \cong 1{,}75\%}$$

Felet blir lägst vid $x = 45°$. Approximativt använder vi samma formel för $x = 30° \rightarrow$
$\rightarrow$ ett fel $\approx 2\%$.

Att differentiera en funktion är att bilda dess differential. Denna erhåller man enligt (2) genom att multiplicera funktionens derivata med den oberoende variabelns differential.

För $y = a$ är $dy = 0 * dx = 0$; För $y = x^n$ är $dy = n * x^{n-1} * dx$

Deriveringsreglerna gäller även för differentiering om ordet derivera utbytes mot differential.

$$\boxed{d(u+v) = (u'+v')dx = u'\,dx + v'\,dx = du + dv}$$

$$\boxed{d(u*v) = (u*v'+v*u')dx = uv'\,dx + vu'\,dx = udv + vdu}$$

$$\boxed{d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v*u'-u*v'}{v^2}dx = \frac{vdu - udv}{v^2}}$$

Av kedjeregeln $y' = y'_z * z'$ följer enligt (2)

$$\boxed{dy = y'_z * z'dx = y'_z * dz}$$

Samma värde på ***dy*** skulle erhållas, om *z* vore en oberoende variabel (med av ***x*** och ***dx*** bestämda *z*- och ***dz***-värden).

Detta, att man vid differentiering ej behöver skilja på beroende och oberoende variabler (regeln om differentialens permanens), är det just som gör räkning med differentialer så användbart.

Ex 3. Bestäm genom differentiering dy / dx, om $x^3 + xy + y^3 = 5$. Vi får:

$$\boxed{3x^2dx + xdy + ydx + 3y^2dy = 0} \longrightarrow \boxed{dy(x+3y^2) = -dx(3x^2+y)} \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \boxed{\frac{dy}{dx} = -\frac{3x^2+y}{x+3y^2} = y'}$$

Ex 4. Bestäm genom differentiering dy/dx, om $y = z^2$ och $z = 2x^3 - 4$ **(9)** $\longrightarrow$
$\longrightarrow$ $dz = 6x^2dx$ **(10)** och $dy = 2z\,dz$ **(11)**

Kombineras (9), (10) och (11) får vi: $dy = 2 * (2x^3 - 4) * 6x^2dx \longrightarrow$

$$\longrightarrow \boxed{\frac{dy}{dx} = 24x^5 - 48x^2 = y'}$$

Ex 5. Bestäm genom differentiering dy / dx, om $x = 1 / t$; $y = (1 - 4t) / t^2$;
Elimineras ***t***, erhålles:

$$\boxed{y = \frac{1 - \frac{4}{x}}{\frac{1}{x^2}} = x^2 - 4x \to \frac{dy}{dx} = 2x - 4}$$

Byter vi nu ut ***x*** med **1/*t*** erhålles:

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{2}{t} - 4 = \frac{2-4t}{t}}$$

Man talar, liksom ifråga om derivator, även om differentialer av högre ordning.

Differentieras $y = x^2$ erhålles $dy = 2xdx$. Här är ***dy*** en funktion av ***x*** , som kan differentiera varvid ***dx*** får betraktas som en konstant, då ***x*** är oberoende variabel. Därvid fås: $d(dy) = 2dx * dx$. Om nu $d(dy)$ tecknas d^2y får vi $d^2y = 2dx^2 \longrightarrow$

$$\longrightarrow \boxed{\frac{d^2y}{dx^2} = 2 = y''}$$

Man får inte förväxla $dx^2 = (\mathrm{dx})^2$ med $d(x^2) = 2xdx$ eller med $d^2x = 0$ **,** om $\boldsymbol{x}$ är en oberoende variabel.

Ex 6. Bestäm $d^2y\,/\,dx^2$; om $x = 1\,/\,t$ och $y = (1-4t)\,/\,t^2$. Enligt Ex 5 är:

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = 2x - 4}$$

Deriveras nu uttrycket får vi:

$$\boxed{d\left(\frac{dy}{dx}\right) = (2x-4)dx \rightarrow \frac{d^2y}{dx^2} = 2 = y''}$$

Med $\boldsymbol{y}$ som oberoende variabel är $d^2y = 0$ och därmed $d^2y\,/\,dx^2 = 0$

Regeln om permanensen gäller tydligen ej för differentialer av 2:a och högre ordning.